FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

I) Définition et conséquences

Rappelons que la fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et que **e** est le nombre dont le logarithme népérien est égal à 1. (ln **e** = 1 et **e** $\simeq$ 2,718...)

<u>Définition 1</u>

On appelle fonction exponentielle de base **e**, la bijection réciproque de la fonction ln. On la note exp.

On a donc l'équivalence suivante, pour tout nombre y strictement positif :

$$y = \exp x \iff x = \ln y$$

<u>Remarque</u> : on verra au §6 qu'il existe des fonctions exponentielles de bases différentes de **e**. Lorsque la base n'est pas précisée, on sous-entend qu'il s'agit de la base **e**.

<u>On a donc</u> :

- exp 0 = 1 car ln 1 = 0.
- exp 1 = **e** car ln **e** = 1.
- exp $x > 0$ pour tout réel x car la fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.
- Puisque les fonction ln et exp sont réciproques, on a :

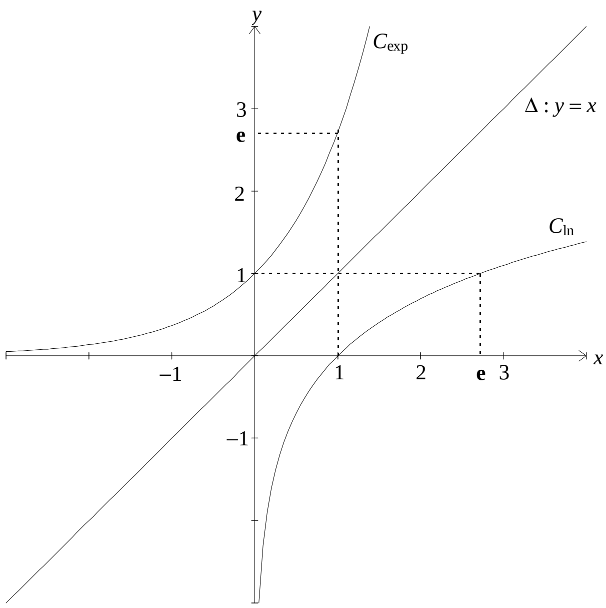
$$\ln(\exp x) = x \text{ pour tout réel } x$$

$$\exp(\ln x) = x \text{ pour tout réel } x > 0.$$

- Puisque la fonction exp est une bijection on a l'équivalence suivante :

$$\exp x = \exp y \iff x = y$$

- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ puisque la fonction ln est définie sur $]0+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa représentation graphique est symétrique de celle de la fonction ln par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) :



Nous pouvons donc conjecturer les limites de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$ (puisque $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

(Ces résultats seront démontrés plus rigoureusement au §5)

II) Théorème fondamental

Théorème 1

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$

La fonction exp transforme les sommes en produits

Démonstration : on utilise le fait que la fonction ln transforme les produits en somme :

$$\ln(\exp a \times \exp b) = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = a + b = \ln(\exp(a + b))$$

Et, compte tenu du fait que, pour tous réels A et B de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln A = \ln B$ équivaut à $A = B$, on a :

$$\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$$

Théorème 2

Pour tout réel a et tout entier relatif p, on a : $\exp(ap) = (\exp a)^p$

Démonstration :

$$\ln((\exp a)^p) = p \ln(\exp a) = pa = \ln(\exp(pa)) \text{ d'où } \exp(pa) = (\exp a)^p$$

Nouvelle notation pour la fonction exponentielle :

Remarquons que d'après le théorème 2, pour tout entier relatif p, on peut écrire :

$$\exp p = \exp(1 \times p) = (\exp 1)^p = \mathbf{e}^p$$

Par convention, on posera : $\mathbf{e}^x = \exp x$, pour tout réel x (Rappel : $\mathbf{e} \simeq 2{,}718...$)

Nous allons voir que les propriétés de l'exponentielle telles qu'elles s'écrivent avec cette nouvelle notation sont compatibles avec les propriétés des puissances.

III) Propriétés

Propriétés

Pour tous réels x et y (sauf restriction précisée) on a :

$\mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x \mathbf{e}^y$	$\mathbf{e}^{x-y} = \dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$	$\mathbf{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$	$\left(\mathbf{e}^x\right)^y = \mathbf{e}^{xy}$
$\mathbf{e}^0 = 1$ et $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}$	$\mathbf{e}^x > 0$	$\ln \mathbf{e}^x = x$	$\mathbf{e}^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

Démonstrations : en utilisant les règles de calculs sur le logarithme :

$$\ln(\mathbf{e}^{x+y}) = x + y = \ln \mathbf{e}^x + \ln \mathbf{e}^y = \ln(\mathbf{e}^x \mathbf{e}^y) \text{ d'où } \mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x \mathbf{e}^y$$

$$\ln(\mathbf{e}^{x-y}) = x - y = \ln \mathbf{e}^x - \ln \mathbf{e}^y = \ln\left(\frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}\right) \text{ d'où } \mathbf{e}^{x-y} = \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$$

$$\ln(\mathbf{e}^{-x}) = -x = -\ln \mathbf{e}^x = \ln \frac{1}{\mathbf{e}^x} \text{ d'où } \mathbf{e}^{-x} = \frac{1}{\mathbf{e}^x}$$

La relation $\left(\mathbf{e}^x\right)^y = \mathbf{e}^{xy}$ n'a pas encore de sens pour $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ à ce stade de la leçon et sera démontrée au §6.

Exemple : simplifier $\left(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}\right)^2 - \mathbf{e}^{2x}\left(1 - \mathbf{e}^{-4x}\right)$

IV) Étude des variations de la fonction exponentielle de base e

> Théorème 3
>
> La fonction exponentielle de base **e** est dérivable sur ℝ et pour tout réel x on a :
>
> $$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$$
>
> *la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée*

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que le rapport $\dfrac{\mathbf{e}^{x+h}-\mathbf{e}^x}{h}$ admet une limite finie (égale à $\mathbf{e}^x$) lorsque h tend vers 0.

Pour tout $h \neq 0$, on a d'après les propriétés : $\dfrac{\mathbf{e}^{x+h}-\mathbf{e}^x}{h} = \mathbf{e}^x \; \dfrac{\mathbf{e}^h-1}{h}$.

En posant $t = \mathbf{e}^h$ nous avons : $\dfrac{\mathbf{e}^h-1}{h} = \dfrac{t-1}{\ln t}$. Comme h tend vers 0, nous avons t qui tend vers 1.

Or, nous savons que $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{\ln t}{t-1} = (\ln)'(1) = 1$, donc $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t-1}{\ln t} = 1$ également.

D'où $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\mathbf{e}^h-1}{h} = 1$ et, par suite, $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\mathbf{e}^{x+h}-\mathbf{e}^x}{h} = \mathbf{e}^x$.

> La fonction exponentielle est donc solution du problème différentiel suivant :
>
> $y' = y$ et $y(0) = 1$

Ce qui prouve que, pour tout réel x, nous avons $\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$.

Autre démonstration (plus simple mais moins rigoureuse) :

on considère les fonctions f et g définies sur ℝ par $f(x) = \ln\, \mathbf{e}^x$ et $g(x) = x$

Il est clair que f = g sur ℝ. Nous aurons donc également $f' = g'$ sur ℝ. Or $f'(x) = \dfrac{\left(\mathbf{e}^x\right)'}{\mathbf{e}^x}$ et $g'(x) = 1$.

D'où
$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$$

(Cette dernière démonstration est moins rigoureuse car elle s'appuie sur le fait que la fonction exponentielle est dérivable et ne prouve que le résultat $\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$)

> Théorème 4
>
> La fonction exponentielle de base **e** est continue et strictement croissante sur ℝ.

Démonstration :

Le fonction exponentielle étant dérivable sur ℝ, elle est continue sur ℝ.

Sa dérivée (qui est $\mathbf{e}^x$) est strictement positive sur ℝ, donc la fonction exponentielle est donc strictement croissante sur ℝ.

Conséquence : on a l'équivalence suivante : $\boxed{\mathbf{e}^x \leqslant \mathbf{e}^y \iff x \leqslant y}$

Cette dernière propriété sera très utile pour établir des inégalités ou pour résoudre des inéquations.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de la dérivée $\mathbf{e}^x$	+	
variation de la fonction exp	0 ↗	$+\infty$

V) Limites de référence

Lemme

La représentation graphique de la fonction exponentielle est toujours située au dessus de la première bissectrice ($y = x$) : $x < \mathbf{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Démonstration :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^x - x$. Sa dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = \mathbf{e}^x - 1$.

On a : $f'(x) \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum m strictement positif en 0 : $m = f(0) = \mathbf{e}^0 - 0 = 1$.

Par conséquent la fonction f est strictement positive pour tout réel x, d'où le lemme.

Remarque : on a même : $1 + x \leqslant \mathbf{e}^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Démonstration analogue)

Exercices :

- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \mathbf{e}^x$.
- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $2x \leqslant \mathbf{e}^x$. A-t-on : $3x \leqslant \mathbf{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Soit $a \in \mathbb{R}$. En étudiant la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathbf{e}^x - ax$, déterminer le plus grand réel a tel que : $ax \leqslant \mathbf{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Interpréter graphiquement en terme de tangentes (à des courbes que l'on précisera)
- Comparer sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{e}^x$ et x^2. Puis $\mathbf{e}^x$ et x^3.

Théorème 5 Limites de l'exponentielle en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathbf{e}^x = 0$$

Démonstration :

D'après le lemme on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x < \mathbf{e}^x$.

Or, nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que l'exponentielle admet bien une limite en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty.$$

Posons $X = -x$. Si x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$. Compte tenu de la relation $\mathbf{e}^x = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{-x}} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^X}$ nous avons :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{e}^x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^X} = 0 \text{ (puisque } \lim_{X \to +\infty} \mathbf{e}^X = +\infty)$$

Théorème 6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathbf{e}^x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\ \mathbf{e}^x = 0$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Démonstration du théorème 6 :

Posons $X = \mathbf{e}^x$ (donc $x = \ln X$).

Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ également, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty \text{ car } \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ avec } \frac{\ln X}{X} > 0 \text{ puisque } X > 1.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers 0 par valeurs supérieures, d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathbf{e}^x = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} X \ln X = 0.$$

(On peut également poser $X = -x$ et utiliser la première limite)

Pour la troisième limite, nous reconnaissons l'accroissement moyen de la fonction exponentielle en 0, sa limite est donc égale au nombre dérivé en 0 à savoir $\mathbf{e}^0 = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^0}{x - 0} = \exp' 0 = \mathbf{e}^0 = 1$$

(Plus rigoureusement, on devrait procéder comme dans la démonstration du théorème 3)

Posons $X = \dfrac{x}{n}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ également, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathbf{e}^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathbf{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n n^{-n} = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{\mathbf{e}^X}{X}\right)^n n^{-n} = 0 \text{ (puisque } \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^X}{X} = 0)$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $-\infty$ également, d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n\ \mathbf{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \left(x\mathbf{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{n}\mathbf{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n n^n = \lim_{X\to-\infty} \left(X\mathbf{e}^X\right)^n n^n = 0 \text{ (puisque } \lim_{X\to-\infty} X\mathbf{e}^X = 0)$$

Conséquence des deux dernières limites : Soit P un polynôme différent du polynôme nul ($P \neq 0$).

On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{|P(x)|} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)\,\mathbf{e}^x = 0$

La preuve est immédiate puisque un polynôme est équivalent en $+\infty$ (et $-\infty$) à son terme du plus haut degré.

En conséquence, l'exponentielle ne peut être majorée par aucune fonction polynôme sur $[0, +\infty[$.

Exercice : Étudier la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\sqrt{x}}$

(On écrit simplement $\dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{x} \times \sqrt{x}$ et on en déduit, par produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\sqrt{x}} = 1 \times 0 = 0$)

VI) Fonctions exponentielles de base a (a > 0)

<u>Définition 2</u>

Soit a un réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f_a (notée parfois $\exp_a$) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathbf{e}^{x \ln a}$

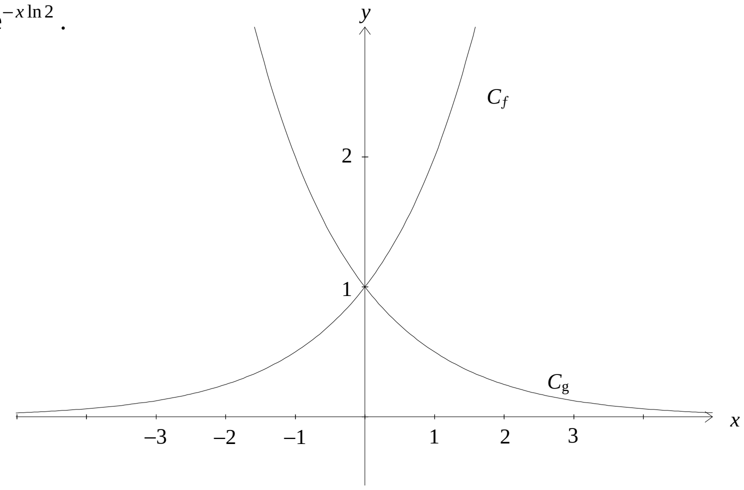
On remarque que, pour $x \in \mathbb{Z}$, on a : $f_a(x) = a^x$.

On notera donc, par convention : $a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$ pour tout $x = \mathbb{R}$.

On remarquera la nécessité de la condition $a > 0$ pour définir les fonctions f_a et le rôle de la condition $a > 1$ pour le sens de variation de ces fonctions.

<u>Exemples</u> : on considère les fonctions exponentielles f et g de bases 2 et $\frac{1}{2}$ respectivement :

$$f(x) = 2^x = \mathbf{e}^{x \ln 2} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathbf{e}^{-x \ln 2}.$$



On a :

$f'(x) = \ln 2 \ \mathbf{e}^{x \ln 2} > 0$ pour tout réel x,

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = -\ln 2 \ \mathbf{e}^{-x \ln 2} < 0$ pour tout réel x,

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Application</u> : Nous avons vu lors du cours sur le logarithme néperien la relation : $\ln a^p = p \ln a$ ($p \in \mathbb{Z}$)

Nous pouvons maintenant étendre cette relation à tout exposant x réel :

$$\ln a^x = \ln \mathbf{e}^{x \ln a} = x \ln a$$

<u>Règles de calculs</u>

Pour tous a et b de $\mathbb{R}_+^*$ et tous x et y de $\mathbb{R}$:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

<u>Démonstrations</u> :

- $a^{x+y} = \mathbf{e}^{(x+y)\ln a} = \mathbf{e}^{x \ln a + y \ln a} = \mathbf{e}^{x \ln a}\mathbf{e}^{y \ln a} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \mathbf{e}^{(x-y)\ln a} = \mathbf{e}^{x \ln a - y \ln a} = \dfrac{\mathbf{e}^{x \ln a}}{\mathbf{e}^{y \ln a}} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \mathbf{e}^{-x \ln a} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{x \ln a}} = \dfrac{1}{a^x}$
- Posons $b = a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$. On a : $\left(a^x\right)^y = b^y = \mathbf{e}^{y \ln b} = \mathbf{e}^{y \ln(\mathbf{e}^{x \ln a})} = \mathbf{e}^{yx \ln a} = a^{xy}$
- $a^x b^x = \mathbf{e}^{x \ln a} \ \mathbf{e}^{x \ln b} = \mathbf{e}^{x \ln a + x \ln b} = \mathbf{e}^{x(\ln a + \ln b)} = \mathbf{e}^{x \ln(ab)} = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \dfrac{\mathbf{e}^{x \ln a}}{\mathbf{e}^{x \ln b}} = \mathbf{e}^{x \ln a - x \ln b} = \mathbf{e}^{x(\ln a - \ln b)} = \mathbf{e}^{x \ln(\frac{a}{b})} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Conséquence : démonstration de la propriété : $\left(\mathbf{e}^x\right)^y = \mathbf{e}^{xy}$ pour tous réels x et y :

on applique simplement la relation $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ avec $a = \mathbf{e} > 0$.

Énigme : où est l'erreur dans le calcul suivant :

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Réponse : la relation $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ n'est pas valable pour $a = -1$...

Théorème 7

Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Si $a = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 1$

Démonstration :

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ (puisque $\ln a > 0$) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\ln a} = +\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x\ln a} = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ (puisque $\ln a < 0$) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\ln a} = 0$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x\ln a} = +\infty$.

Si $a = 1$, le résultat est évident puisque $f_1 = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 8

Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$

Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$

Démonstration :

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln a}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln a}}{x\ln a}\ln a = +\infty$ (puisque $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^X}{X} = +\infty$)

Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln a}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln a}}{x\ln a}\ln a = -\infty$ (puisque $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^X}{X} = +\infty$)

Exercice : Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \mathbf{e}^a$.

Nous avons : $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \mathbf{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} \underset{X=\frac{a}{x}}{=} \mathbf{e}^{a\frac{\ln(1+X)}{X}}$

Or, lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers 0 et nous savons que $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = \ln'(1) = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{X\to 0} \mathbf{e}^{a\frac{\ln(1+X)}{X}} = \mathbf{e}^a$. Et en particulier : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$.

Exercice : étudier $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

VII) Dérivées et primitives

Théorème 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par $\mathbf{e}^u$ est dérivable sur I et :

$$\left(\mathbf{e}^u\right)' = u'\ \mathbf{e}^u$$

Exemples :

- Dériver la fonction f suivante sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \mathbf{e}^{x^2}$. On obtient : $f'(x) = 2x\ \mathbf{e}^{x^2}$.
- Trouver une primitive de la fonction f suivante sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \cos x\, \mathbf{e}^{\sin x}$. On obtient : $F(x) = \mathbf{e}^{\sin x}$.

Démonstration :

Simple conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée (voir leçon sur le calcul différentiel) :

On applique la formule : $(v \text{ o } u)'(x) = u'(x)\ v'(u(x))$ avec $v(x) = \mathbf{e}^x$

Exercice : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier la limite lorsque t tend vers 0 de : $\dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t}$

On écrit : $\dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t} = \dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - 1}{t} - \dfrac{\mathbf{e}^{-\beta t} - 1}{t}$.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$. La fonction f est dérivable et $f'(t) = -\lambda\, \mathbf{e}^{-\lambda t}$.

L'accroissement moyen de f en 0 s'écrit : $\dfrac{f(t) - f(0)}{t} = \dfrac{\mathbf{e}^{-\lambda t} - 1}{t}$. Nous avons donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{-\lambda t} - 1}{t} = f'(0) = -\lambda$.

Ainsi, $\dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t}$ admet une limite en 0 et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - 1}{t} - \dfrac{\mathbf{e}^{-\beta t} - 1}{t} = -\alpha - (-\beta) = \beta - \alpha$.

VIII) Fonctions puissances

Définition 3

Soit α un réel. On appelle fonction puissance la fonction f_α définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Dans la pratique, ces fonctions s'étudient sans problèmes en écrivant : $x^\alpha = \mathbf{e}^{\alpha \ln x}$. (On notera la nécessité de définir f_α sur $]0 ; +\infty[$)

Exemple : $f_\pi(x) = x^\pi = \mathbf{e}^{\pi \ln x}$.

Théorème 10

Les fonctions puissances f_α sont dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et :

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Exemple : $f_\pi'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

Démonstration : $f_\alpha(x) = \mathbf{e}^{\alpha \ln x}$, d'où $f_\alpha'(x) = \alpha \dfrac{1}{x}\, \mathbf{e}^{\alpha \ln x} = \alpha \dfrac{1}{x}\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Le signe de α détermine donc le sens de variation des fonctions f_α :

si $\alpha > 0$ alors f_α est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

si $\alpha < 0$ alors f_α est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Lorsque $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathbf{e}^{\alpha \ln x} = 0$ (puisque $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$).

Les fonctions puissances f_α sont donc (pour $\alpha > 0$) prolongeables par continuité en 0. Nous pouvons donc poser $f_\alpha(0) = 0$, c'est-à-dire : pour tout réel $\alpha > 0$: $0^{\alpha} = 0$.

Cas particulier : lorsque $\alpha = 0$, nous avons $f_0(x) = x^0 = \mathbf{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_0(x) = 1$. La fonction f_0 est donc prolongeable par continuité en 0. Nous pouvons donc poser : $f_0(0) = 1$, c'est-à-dire : $0^0 = 1$.

Exercice : étudier l'application f définie $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\mathbf{e}}$. Démontrer que la tangente à sa courbe au point d'abscisse $\mathbf{e}$ coïncide avec celle de l'exponentielle à la même abscisse.

Application des fonctions puissances : racine $n^{\text{ième}}$ ($n \geqslant 2$) : on appelle racine $n^{\text{ième}}$ l'application :

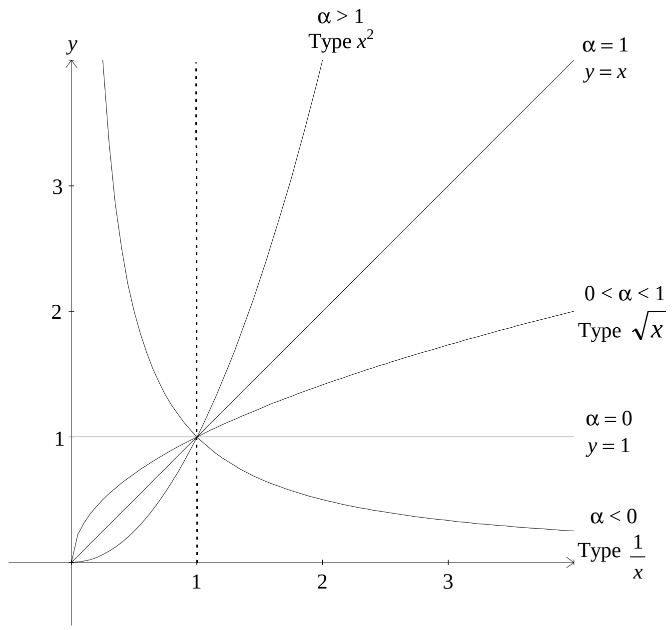
$$R_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow]0\,;+\infty[$$
$$x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$$

Lorsque n est impair ($n = 2p + 1$), on peut définir la racine $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}$ comme bijection réciproque (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de l'application $x \longmapsto x^{2p+1}$.

Pour $x > 0$, on note souvent $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ et on a l'équivalence : $y = \sqrt[n]{x} \iff (x = y^n \text{ et } y > 0)$

Remarquons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathbf{e}^{\frac{1}{n}\ln x} = 0$ (puisque $\dfrac{1}{n} > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$). La fonction R_n est donc prolongeable par continuité en 0 et nous pouvons donc poser $R_n(0) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt[n]{0} = 0$.

Représentation graphique des fonctions puissances :



Propriété :

lorsque $x > 1$, les fonctions puissances sont "rangées" dans le même ordre que les exposants :

$$\ldots < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < x^\pi < x^4 < \ldots$$

lorsque $0 < x < 1$, les fonctions puissances sont "rangées" dans l'ordre inverse des exposants :

$$\ldots < x^4 < x^\pi < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} < \ldots$$

Cette propriété se démontre aisément : soient α et β deux exposants réels tels que $\alpha < \beta$. Comparons x^α et x^β :

On a $\alpha < \beta$

Si $x > 1$, alors $\ln x > 0$, d'où : $\alpha \ln x < \beta \ln x$

Et comme l'exponentielle est une fonction strictement croissante : $\mathbf{e}^{\alpha \ln x} < \mathbf{e}^{\beta \ln x}$ c'est-à-dire $x^\alpha < x^\beta$.

Par contre, si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$, d'où : $\alpha \ln x > \beta \ln x$

Et comme l'exponentielle est une fonction croissante : $\mathbf{e}^{\alpha \ln x} > \mathbf{e}^{\beta \ln x}$ c'est-à-dire $x^\alpha > x^\beta$.

Voyons maintenant comment dériver une expression du type u^α :

Théorème 11

Soit α un réel et u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction définie par u^α est dérivable sur I et : $\left(u^\alpha\right)' = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$

Démonstration : $u^\alpha = \mathbf{e}^{\alpha \ln u}$, d'où $\left(u^\alpha\right)' = \alpha \frac{u'}{u}\, \mathbf{e}^{\alpha \ln u} = \alpha \frac{u'}{u}\, u^\alpha = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$.

Théorème 12

Soit α un réel différent de -1 et u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

Une primitive de la fonction définie par $u'\, u^\alpha$ sur I est : $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Démonstration : on utilise le théorème 9 en dérivant l'expression $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exemples :

- Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

  On remarque que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\, u'\, u^{\frac{1}{2}}$. D'où $F(x) = \frac{1}{2} \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$.

- Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

  La fonction f est de la forme $f = u'\, u^\alpha$ avec $u(x) = x$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. Donc $F = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

  On trouve : $F(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x}$.

IX) Croissances comparées

Théorème 13

Pour tous réels α et β **strictement positifs** et pour tout réel $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et en particulier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a^x)^\beta}{x^\alpha} = +\infty$ et en particulier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha(\ln x)^\beta = 0$ et en particulier $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha \ln x = 0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha(a^{-x})^\beta = 0$ et en particulier $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha\mathbf{e}^{-x} = 0$

Ce théorème étant techniquement difficile à retenir, on lui préfère parfois la règle suivante (à formuler avec minutie) :

Pour les produits ou quotients indéterminés ne faisant intervenir que des exponentielles (de base a > 1), des puissances et des logarithmes (ou des puissances d'exposants positifs de ceux-ci) l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances qui elles-mêmes "l'emportent" sur le logarithme...

Ces résultats prolongent ceux déjà établis dans les paragraphes "limites de références" (n°5 dans la présente leçon et n°4 dans le leçon sur le logarithme népérien)

Démonstration :

1. $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \dfrac{\mathbf{e}^{\beta\ln(\ln x)}}{\mathbf{e}^{\alpha\ln x}} = \mathbf{e}^{\beta\ln(\ln x)-\alpha\ln x} \underset{X=\ln x}{=} \mathbf{e}^{\beta\ln X-\alpha X} = \mathbf{e}^{X\left(\beta\frac{\ln X}{X}-\alpha\right)}$

   Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \beta\dfrac{\ln X}{X}-\alpha = -\alpha\ (<0)$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} X\left(\beta\dfrac{\ln X}{X}-\alpha\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathbf{e}^{X\left(\beta\frac{\ln X}{X}-\alpha\right)} = 0$

   On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $(\beta = 1)$

2. $\dfrac{(a^x)^\beta}{x^\alpha} = \dfrac{\mathbf{e}^{\beta x\ln a}}{\mathbf{e}^{\alpha\ln x}} = \mathbf{e}^{\beta x\ln a-\alpha\ln x} = \mathbf{e}^{x\left(\beta\ln a-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \beta\ln a-\alpha\dfrac{\ln x}{x} = \beta\ln a > 0$ (car $a > 1$ et $\beta > 1$)

   On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\left(\beta\ln a-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a^x)^\beta}{x^\alpha} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$ ($a = \mathbf{e}$ et $\beta = 1$)

3. $x^\alpha(\ln x)^\beta \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \dfrac{(-\ln X)^\beta}{X^\alpha}$

   Or, si x tend vers 0 par valeurs supérieurs, X tend vers $+\infty$. On a donc :

   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha(\ln x)^\beta = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(-\ln X)^\beta}{X^\alpha} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(-1)^\beta(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$ d'après 1.

4. $x^\alpha(a^{-x})^\beta = \mathbf{e}^{\alpha\ln x-x\beta\ln a} = \mathbf{e}^{x\left(\alpha\frac{\ln x}{x}-\beta\ln a\right)}$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\dfrac{\ln x}{x} - \beta\ln a = -\beta \ln a < 0$ (car $a > 1$ et $\beta > 0$)

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\left(\alpha\frac{\ln x}{x}-\beta\ln a\right)} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}(a^{-x})^{\beta} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\mathbf{e}^{-x} = 0$ ($a = \mathbf{e}$ et $\beta = 1$)

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{\pi}}{\sqrt{x}} = 0$ (cas 1 avec $\beta = \pi$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1000}}{1{,}01^{x}} = 0$ (cas 4 avec $\alpha = 1000$, $a = 1{,}01$ $\beta = 1$) (imprévisible avec une calculatrice !)

X) Complément : fonctions ch et sh

Définition 4

On définit les fonction ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Ces fonctions s'étudient sans peine et l'on a notamment : ch' x = sh x et sh' x = ch x.