

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

On a vu dans le chapitre sur les primitives que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I . La fonction "inverse", définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, admet donc des primitives. Parmi ces primitives F , que nous ne sommes pas capables d'explicitier, une seule vérifie la condition $F(1) = 0$. C'est précisément cette fonction F qui s'appelle logarithme népérien. De cette définition se dégagerons progressivement diverses propriétés qui finiront par nous éclairer largement sur cette fonction logarithme.

I) Définition et conséquences

Définition

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ (restriction de la fonction "inverse" à $]0 ; +\infty[$). La fonction logarithme népérien notée \ln est la primitive F de f telle que $F(1) = 0$

Conséquences immédiates :

- la fonction primitive est définie sur le même intervalle que la fonction considérée, donc la fonction \ln est définie sur $]0 ; +\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- la fonction \ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$
- la fonction \ln est continue sur $]0 ; +\infty[$ puisque dérivable sur cet intervalle
- la fonction \ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ puisque sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle, ce qui permet une première esquisse de son tableau de variations :

	x	0	1	$+\infty$
signe de la dérivée $\frac{1}{x}$			+	
variation de la fonction \ln				

- ainsi, nous en déduisons également le signe de la fonction \ln :

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

- la fonction \ln étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur l'intervalle image (que nous préciserons ultérieurement). On en déduit que pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, on a :
 - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
 - $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

En effet, si $a = b$ alors il est clair que $\ln a = \ln b$. Pour la réciproque, voir l'annexe sur le raisonnement par contraposition et le raisonnement par l'absurde.

De même, si $a < b$ alors (stricte croissance du \ln) $\ln a < \ln b$. Pour la réciproque, voir l'annexe sur le raisonnement par contraposition et le raisonnement par l'absurde.

Exercices :

- Ensemble de définition des fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln(x+3)$ et $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$
- Dériver la fonction f définie par : $f(x) = 3 - x + \ln x$.
- Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - x - \frac{4}{x}$ telle que $F(1) = 2$.
- Résoudre l'équation $\ln(x-2) = 0$ et l'inéquation $\ln(x-2) \leq 0$.
- Résoudre l'équation $\ln(2x+1) = \ln(3-x)$.

II) Théorème fondamental

Théorème 1

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

(la fonction logarithme transforme les produits en somme)

Remarque : Si a et b sont strictement négatifs, on a une relation analogue : $\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$, et plus généralement, pour tous réels a et b de \mathbb{R}^* : $\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b|$.

Démonstration : pour tout réel a strictement positif, considérons la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$G(x) = \ln(ax)$$

La fonction G est dérivable (G est une composée de fonctions dérivables : $G = v \circ u$ avec $u(x) = ax$ et $v = \ln$), et :

$$G'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}.$$

La fonction G est donc une primitive de la fonction inverse tout comme la fonction \ln . Elles diffèrent donc d'une constante c :

$$G(x) = \ln x + c$$

$$\ln(ax) = \ln x + c$$

Calculons la constante c : si $x = 1$, on a : $\ln a = \ln 1 + c = 0 + c$ d'où $c = \ln a$ et finalement :

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \text{ pour tout réel } x \in]0; +\infty[$$

Conséquences : pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln a^p = p \ln a \quad (p \in \mathbb{Z}) \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstrations :

$$0 = \ln 1 = \ln \left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b} \text{ d'où } \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } p > 0 \text{ alors } \ln a^p = \ln (a \times a \times \dots \times a) = \ln a + \ln a + \dots + \ln a = p \ln a$$

$$\text{Si } p < 0 \text{ alors } \ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln (a^{-p}) = -(-p) \ln a = p \ln a$$

La relation $\ln a^p = p \ln a$ sera étendue à tout réel p au chapitre suivant.

$$\ln a = \ln (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a} \text{ d'où } \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

III) Étude de la fonction ln

1) Limites aux bornes de l'ensemble de définition]0 ; +∞[

Théorème 2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Démonstration :

Établissons, pour commencer, le deuxième résultat :

Soit p un entier naturel. On a $\ln 2^p = p \ln 2$. D'où $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln 2^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \ln 2 = +\infty$.

Soit x un nombre réel tel que $x \geq 2^p$. La fonction ln est strictement croissante, donc $\ln x \geq \ln 2^p$.

Passons à la limite (théorème de compatibilité avec l'ordre si $f \leq g$ alors $\lim f \leq \lim g$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \ln 2^p$$

Or, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln 2^p = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Le premier résultat en découle simplement par changement de variable :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = -\infty.$$

La représentation graphique de ln admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ mais n'admet pas d'asymptote horizontale.

Théorème 3

La fonction ln est une bijection (strictement croissante) de]0 ; +∞[sur ℝ.

Démonstration :

La stricte croissance et la bijectivité ont déjà été établies. En outre, comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et

comme la fonction ln est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$. L'intervalle image de]0 ; +∞[par la fonction ln est donc ℝ.

2) Le nombre e

Puisque la fonction ln est une bijection de]0 ; +∞[dans ℝ, pour tout réel λ l'équation $\ln x = \lambda$ admet une unique solution dans]0 ; +∞[.

Définition

On note e l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. Ce nombre e s'appelle base du logarithme népérien.

On a donc $\ln e = 1$. Le nombre e s'obtient avec une calculatrice avec la touche $\boxed{e^x}$ et $x = 1$. On obtient $e \simeq 2,718\dots$

Plus généralement, $\ln e^p = p \ln e = p$, relation pratique pour la résolution des équations :

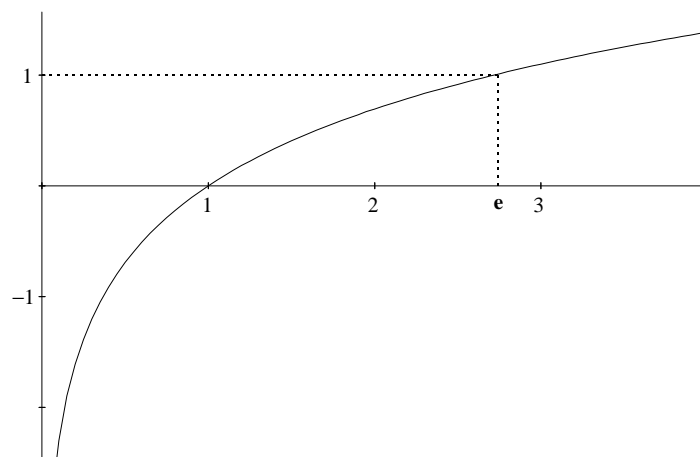
$$\ln(x + 3) = 9 \text{ pour } x > -3$$

$$\ln(x + 3) = \ln e^9$$

$$x + 3 = e^9$$

$$x = e^9 - 3 \simeq 8100$$

3) Représentation graphique de la fonction ln



IV) Limites de références

Lemme

La représentation graphique de la fonction ln est toujours située sous la première bissectrice ($y = x$) :

$$\ln x < x \text{ pour tout } x > 0$$

Démonstration :

On considère la fonction f définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$. Sa dérivée f' est définie sur I par :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$ d'où le tableau de variations de f :

	x	0	1	$+\infty$
Signe de f'		-	0	+
Variations de f				

La fonction f admet un minimum m strictement positif en 1 : $m = f(1) = 1 - \ln 0 = 1$.

Par conséquent la fonction f est strictement positive pour tout réel x positif, d'où le lemme.

Remarque : on a même : $\ln x \leq x - 1$, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$. (Démonstration analogue)

Exercice : démontrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Théorème 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Démonstration :

D'après le lemme, on peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$

$$\frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$$

Et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x}$$

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Autre méthode : on compare avec une intégrale :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq 2\sqrt{x} - 2$$

D'où, pour $x \geq 1$: $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Établissons maintenant la limite suivante à l'aide d'un changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ X > 0}} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0 \text{ d'après ce qui précède.}$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{n-1} x \ln x = 0 \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{n-1} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0.$$

Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît le l'accroissement moyen de la fonction \ln en $x_0 = 1$. La limite est

donc égale au nombre dérivé de la fonction \ln en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$$

Notons que cette limite peut s'écrire sous d'autres formes : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

Corollaire

Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$.

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P . Notons $P(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$)

Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous

avons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Exemples :

Étudier la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$

Aucune limite du théorème 4 semble convenir pour une telle limite. Cependant, on sent bien un air de famille avec la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. L'idée consiste à s'y ramener via l'artifice suivant puis un changement de variable :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \dots$ (On a juste posé $X = x + 1$ ainsi $X \rightarrow +\infty$)

D'où, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$

Étudier la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons : $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \rightarrow +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln X}{X} = 0$$

Par un raisonnement analogue, montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$

IV) Dérivées et primitives

Théorème 5

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .

La fonction définie par $\ln u$ est dérivable sur I et : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Démonstration : conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est : $\ln|u|$

Démonstration : on utilise le théorème précédent en dérivant $\ln|u|$. On distinguera les intervalles où $u > 0$ de ceux où $u < 0$.

Exemples :

• Dériver sur $]0 ; +\infty[: f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln x$. On obtient : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.

• Trouver une primitive F de la fonction inverse sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$:

Solution : $F(x) = \ln(-x)$. En effet $F'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

- Trouver une primitive sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente :

Posons $f(x) = \tan x$. On a $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \cos x > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. D'où une primitive de la fonction tangente : $F(x) = -\ln \cos x$.

Quelques thèmes :

- Étudier et déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$.
- Étudier la fonction G définie sur $]1; +\infty[$ par $G(t) = \ln(\ln t)$ et la fonction F définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par $F(t) = \ln |\ln(t)|$.
- Étudier la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\ln x - \ln(\ln x)$.
- Étudier les fonctions $x \mapsto \ln |x \pm \sqrt{x^2 \pm 1}|$.
- Exemple d'équation transcendante admettant une racine évidente : on considère l'équation $(E) : \ln x = \frac{e}{x}$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln x - \frac{e}{x}$ est strictement croissante et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution que l'on précisera.