LOI BINOMIALE

I) Introduction

La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \dfrac{3}{4}$.

1. On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. ($X = 0$, 1 ou 2)
   a) Calculer la probabilité des événements $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 2]$. (On pourra s'aider d'un arbre "pondéré" et on désignera par **S** les succès et **E** les échecs).
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} P([X = k])$.
2. On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. ($Y \in \{0 ; 1 ; ... ; 6\}$)
   On voudrait calculer la probabilité de l'événement $[Y = 4]$.
   a) Peut-on encore raisonner à l'aide d'un arbre ?
   b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.
   c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des **S** et des **E**, combien contiennent exactement quatre fois la lettre **S** ?
   d) En déduire la probabilité de l'événement $[Y = 4]$.

II) Loi binomiale : définition

1) Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0 ; 1]$ lorsque :

- $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; ... ; n\}$
- pour tout $k \in \{0 ; 1 ; ... ; n\}$, $P([X = k]) = C_n^k \; p^k \; (1-p)^{n-k}$

On note parfois $X \hookrightarrow B(n ; p)$.

Remarque : on a bien : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([X = k]) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; p^k \; (1-p)^{n-k} = \left[p + (1-p)\right]^n = 1$, ce qui explique pourquoi cette loi est dite "binomiale".

2) Théorème

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve comportant deux issues (**S**uccès et **E**chec). On note p la probabilité de **S**uccès.

On répète n fois, de façons indépendantes, l'épreuve $\mathscr{E}$. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès. Alors : ***X* suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p***

Démonstration : en généralisant le raisonnement vu en introduction (I.2.b)c)d)):

La probabilité d'avoir k succès suivis de $n - k$ échecs est : $p^k \; (1-p)^{n-k}$

Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre... Voici un moyen de dénombrer toutes les possibilités d'apparition des succès et échecs : on considère l'ensemble des "mots" de n lettres qui ne contiennent que des **S** et des **E**. On sait qu'il y en a exactement C_n^k qui contiennent exactement k fois la lettre **S** (et donc $n - k$ fois la lettre **E**).

On en déduit : $P([X = k]) = C_n^k \ p^k \ (1-p)^{n-k}$ et ceci pour tout $k \in \{0 ; 1 ; ... ; n\}$.

Remarques :

1. Si on note q la probabilité d'**E**chec, on a : $P([X = k]) = C_n^k \ p^k \ q^{n-k}$
2. La probabilité d'avoir n succès est : $P([X = n]) = p^n$.
3. La probabilité d'avoir aucun succès est : $P([X = 0]) = q^n$. Par conséquent, la probabilité d'avoir au moins un succès est $P([X \geqslant 1]) = 1 - P([X = 0]) = 1 - q^n$.

Exemple :

Reprenons la situation de l'introduction : la probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.

1) On suppose qu'il tire $n = 7$ fois. Quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois ? Deux fois ?

2) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure à 0.95 ?

3) Définition (Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve comportant deux issues (**S**uccès et **E**chec). On note p la probabilité de **S**uccès. Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de **S**uccès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètres p. On note alors : $X \hookrightarrow B(1 ; p)$.

Remarques :

- La loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale où l'épreuve $\mathscr{E}$ n'est réalisée qu'une seule fois.
- Si $X \hookrightarrow B(1 ; p)$ alors $P([X = 1]) = p$ et $P([X = 0]) = 1 - p$.
- Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0 ; 1]$ peut s'écrire comme somme $X = X_1 + ... + X_n$ où, pour tout $k \in \{0 ; 1 ; ... n\}$, X_k est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. (X_k vaut 1 en cas de **S**uccès à la $k^{\text{ème}}$ réalisation de $\mathscr{E}$ et 0 sinon)

III) Espérance et variance de la loi binomiale

Commençons par un petit exercice : démontrer que si $X \hookrightarrow B(1 ; p)$ alors $X^2 \hookrightarrow B(1 ; p)$.

On a $X^2(\Omega) = \{0 ; 1\}$ et $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$, donc $X^2 \hookrightarrow B(1 ; p)$.

1) Proposition

Si $X \hookrightarrow B(1 ; p)$, alors : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ (où $q = 1 - p$)

Démonstration :

$E(X) = P([X = 0]) \times 0 + P([X = 1]) \times 1 = q \times 0 + p \times 1 = p$.

$V(X) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = E\left(X^2\right) - p^2$

Et comme $X^2 \longrightarrow B(1\ ;\ p)$ (d'après l'exercice ci-dessus), on a : $E\left(X^2\right) = E(X) = p$.

Donc $V(X) = p - p^2 = pq$.

2) <u>Proposition</u>

Si $X \hookrightarrow B(n\ ;\ p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\ ;\ 1]$, alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq \text{ (où } q = 1 - p\text{)}$$

<u>Démonstration</u> :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} P([X = k])k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k$$

Or : $k\, C_n^k = n\, C_{n-1}^{k-1}$ d'où :

$$E(X) = n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$E(X) = np\left[p + (1-p)\right]^{n-1} = np$$

<u>Mieux</u> : puisque $X \hookrightarrow B(n\ ;\ p)$, il existe des variables aléatoires (réelles) X_1, X_2, ... , X_n définies sur Ω, indépendantes, de loi de Bernoulli de même paramètre p telles que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Par linéarité de l'espérance : $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Et d'après III.1. : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p = np$.

De même :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Et comme X_1, X_2, ... , X_n sont indépendantes, on a : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Et d'après III.1. : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

<u>Exemple</u> :

Reprenons la situation de l'introduction : la probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \dfrac{3}{4}$.

On suppose qu'il tire $n = 7$ fois. On note X la variable aléatoire associant à cette expérience aléatoire le nombre de succès obtenus. Calculer son espérance et sa variance.

IV) Stabilité de la loi binomiale

1) Théorème (stabilité additive de la loi binomiale).

Si $X \hookrightarrow B(m\,;p)$ et $Y \hookrightarrow B(n\,;p)$ avec X et Y indépendantes, alors : $X+Y \hookrightarrow B(m+n\,;p)$

Démonstration :

Posons $S = X + Y$.

On a clairement $S(\Omega) = [\![0\,;m+n]\!]$.

Calculons $P\left(S^{-1}(k)\right)$ pour tout $k \in [\![0\,;m+n]\!]$:

$$S^{-1}(k) = \coprod_{i=0}^{k} X^{-1}(i) \cap Y^{-1}(k-i)$$

D'où :
$$P\left(S^{-1}(k)\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left(X^{-1}(i) \cap Y^{-1}(k-i)\right)$$

Et comme X et Y sont indépendantes :

$$P\left(S^{-1}(k)\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left(X^{-1}(i)\right) P\left(Y^{-1}(k-i)\right)$$

Comme $X \hookrightarrow B(m\,;p)$ et $Y \hookrightarrow B(n\,;p)$:

$$P\left(S^{-1}(k)\right) = \sum_{i=0}^{k} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} C_n^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-(k-i)}$$

$$P\left(S^{-1}(k)\right) = \left(\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}\right) p^k (1-p)^{m+n-k}$$

Et comme $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$

$$P\left(S^{-1}(k)\right) = C_{m+n}^k \; p^k (1-p)^{m+n-k}$$

Donc $S \hookrightarrow B(m+n\,;p)$.