Problème sur les exponentielles

Partie *A* *Résolution d'une inéquation comportant des exponentielles*

Résoudre l'inéquation : $2\,\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10 \geqslant 0$ [On pourra poser $X = \mathbf{e}^{x}$]

Partie *B* *Étude d'une fonction comportant des exponentielles*

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Calculer $f(0)$.
2) Étude de f en $+\infty$.
   a) Démontrer que, pour tout réel x, on a :

   $$f(x) = \mathbf{e}^{x}\,(\mathbf{e}^{x} - 12) + 10x + 11$$

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3) Étude de f en $-\infty$.
   a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Soit Δ la droite d'équation : $y = 10x + 11$.
      i) Démontrer que Δ est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.
      ii) Étudier, sur $]-\infty\,;\,0]$, la position de Δ par rapport à C_f.
4) Étude des variations de f.
   a) Calculer la dérivée f' de f.
   b) À l'aide de la partie *A*, dresser le tableau de variations de f.
5) Tracer Δ et C_f. (Unités graphiques : 5cm en abscisses et 1cm en ordonnées)
6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2\,;\,3]$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

Partie *C* *Un calcul d'intégrale*

1) Déterminer une primitive F de f.
2) Calculer la valeur exacte de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{\ln 8} f(x)\,\mathrm{d}x$
3) En déduire l'aire, en cm^2, du domaine D délimité, par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \ln 8$. (On arrondira le résultat final à 0,1 cm^2)

Corrigé du problème sur les exponentielles

Partie *A* *Résolution d'une inéquation comportant des exponentielles*

Posons $X = \mathbf{e}^x$. Ainsi, $X^2 = \left(\mathbf{e}^x\right)^2 = \mathbf{e}^{2x}$ et l'inéquation proposée est alors équivalente à :

$$2X^2 - 12X + 10 \geqslant 0$$

C'est une inéquation du second degré ($aX^2 + bX + c \geqslant 0$) avec $a = 2$, $b = -12$ et $c = 10$.

Le discriminant Δ est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 64$

Le discriminant Δ étant strictement positif, le trinôme $2X^2 - 12X + 10$ admet deux racines distinctes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-8}{4} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+8}{4} = 5$$

De la relation : $aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$, on déduit la forme factorisée de notre inéquation :

$$2(X - 1)(X - 5) \geqslant 0$$

Et comme $X = \mathbf{e}^x$: $2(\mathbf{e}^x - 1)(\mathbf{e}^x - 5) \geqslant 0$

On détermine l'ensemble S des solutions de l'inéquation à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$	Calculs et justification des signes
signe de $\mathbf{e}^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$\mathbf{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
signe de $\mathbf{e}^x - 5$		$-$		$-$	0	$+$		$\mathbf{e}^x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x \geqslant 5 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 5$
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$		

<u>Bilan</u> : $S =]-\infty ; 0] \cup [\ln 5 ; +\infty[$

Partie *B* *Étude d'une fonction comportant des exponentielles*

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^x + 10x + 11$$

1) $f(0) = \mathbf{e}^0 - 12\,\mathbf{e}^0 + 10 \times 0 + 11 = 1 - 12 + 11 = 0$.

2) Étude de f en $+\infty$.

a) Comme $\mathbf{e}^{2x} = \mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^x$, on obtient, en factorisant les deux premiers termes de $f(x)$:

$$f(x) = \mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^x - 12\,\mathbf{e}^x + 10x + 11 = \mathbf{e}^x(\mathbf{e}^x - 12) + 10x + 11$$

b) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathbf{e}^x - 12) = +\infty \end{cases}$$

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x(\mathbf{e}^x - 12) = +\infty$.

En outre : $\lim\limits_{x\to+\infty} (10x + 11) = +\infty$.

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} [\mathbf{e}^x(\mathbf{e}^x - 12) + 10x + 11] = +\infty$.

<u>Conclusion</u> : la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

<u>Remarque</u> : cette limite n'étant **pas finie**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

3) Étude de f en $-\infty$.

a) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{2x} = 0 \ \text{(car } \mathbf{e}^{2x} = \mathbf{e}^{x} \times \mathbf{e}^{x} \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x} = 0) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -12\,\mathbf{e}^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (10x+11) = -\infty \end{cases}$$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11 = -\infty$

<u>Conclusion</u> : la limite de la fonction f en $-\infty$ est $-\infty$.

<u>Remarques</u> :

- On peut également obtenir ce résultat en travaillant avec l'écriture : $f(x) = \mathbf{e}^{x}(\mathbf{e}^{x} - 12) + 10x + 11$.
- La limite de f en $-\infty$ n'étant **pas finie**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

b) Soit Δ la droite d'équation : $y = 10x + 11$.

<u>Note</u> : $f(x) - y$ représente "l'écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ aux points d'abscisse x

i) Étudions **la limite en $-\infty$** de $f(x) - y$:

Déjà, on a : $f(x) - y = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11 - (10x + 11) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x}$

Or, on a vu (question [B2b]) que : $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x}) = 0$

On a donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (10x + 11)] = 0$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, les nombres $f(x)$ s'approchent donc des nombres $10x + 11$.

Autrement dit :

Lorsque x tend vers $-\infty$, les points de C_f s'approchent donc des points de Δ.

<u>Conclusion</u> : la droite Δ est asymptote (oblique) à la courbe C_f en $-\infty$.

ii) Étudions, pour $x \leqslant 0$, **le signe** de $f(x) - y$:

On a : $f(x) - y = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} = \mathbf{e}^{x}(\mathbf{e}^{x} - 12)$

Or, on sait que, d'une part : $\mathbf{e}^{x} > 0$ pour tout réel x

Et, d'autre part : $\mathbf{e}^{x} - 12 < 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$.

(En effet : $x \leqslant 0 \Rightarrow \mathbf{e}^{x} \leqslant \mathbf{e}^{0} \Rightarrow \mathbf{e}^{x} \leqslant 1 \Rightarrow \mathbf{e}^{x} < 12 \Rightarrow \mathbf{e}^{x} - 12 < 0$)

On peut donc affirmer : $\mathbf{e}^{x}(\mathbf{e}^{x} - 12) < 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$

C'est-à-dire : $f(x) - y < 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$

$f(x) < y$ pour tout réel $x \leqslant 0$

C_f est en dessous de Δ sur $]-\infty\,;0]$

4) Étude des variations de f.

a) Nous savons que : $(\mathbf{e}^{u})' = u'\,\mathbf{e}^{u}$ pour toute fonction u dérivable. En particulier avec $u(x) = 2x$, nous obtenons : $(\mathbf{e}^{2x})' = 2\,\mathbf{e}^{2x}$

On en déduit : $f'(x) = 2\,\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10$

b) D'après la partie A, on a : $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\,;0] \cup [\ln 5\,;+\infty[$

On en déduit le tableau de variation de f :

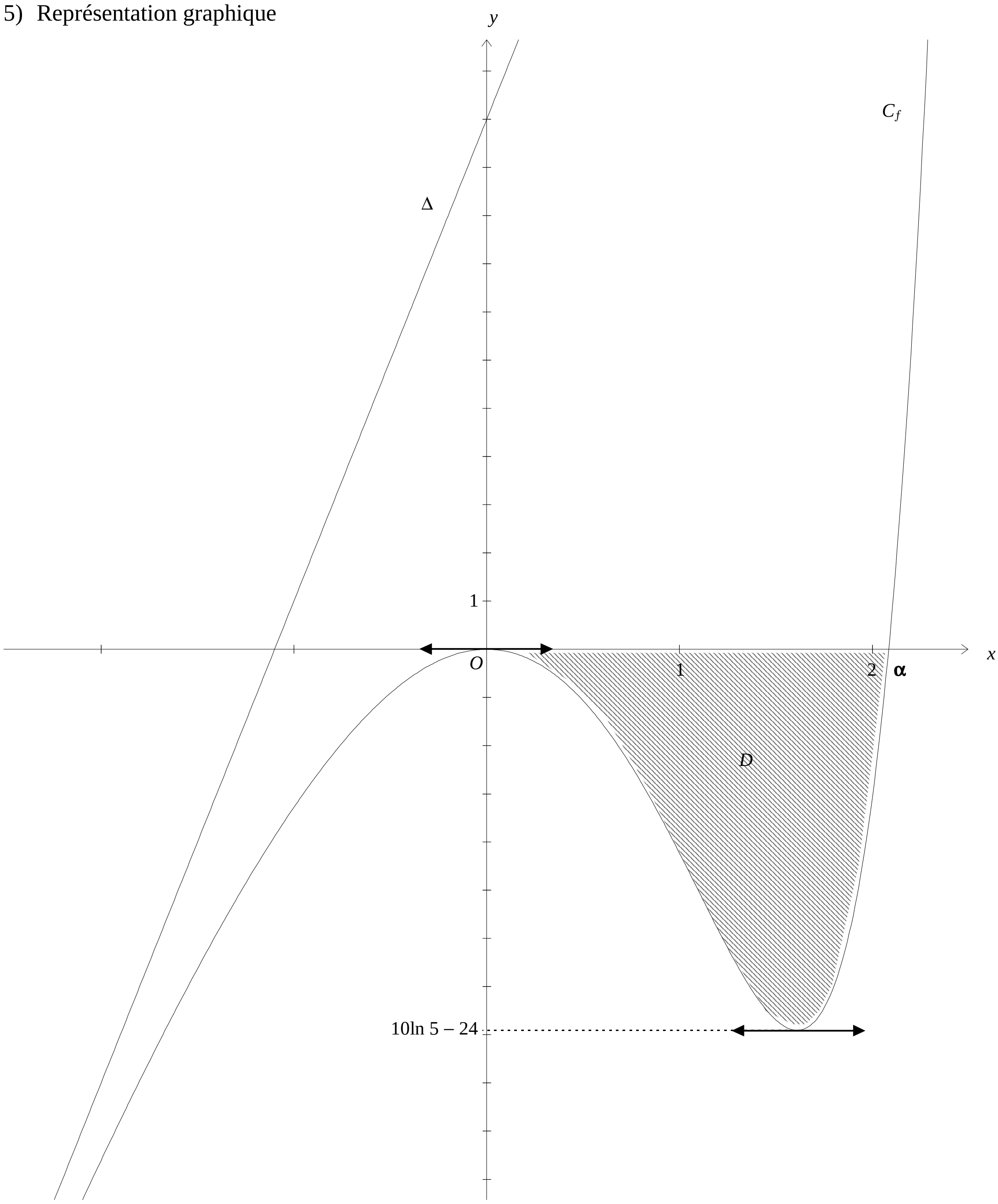
x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
Signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	0	↘	$10\ln 5 - 24$	↗	$+\infty$

La fonction f admet un maximum en 0 : $f(0) = 0$ d'après la question [B1]

La fonction f admet un minimum en ln 5 :

$$f(\ln 5) = \mathbf{e}^{2\ln 5} - 12\,\mathbf{e}^{\ln 5} + 10\ln 5 + 11 = \mathbf{e}^{\ln 25} - 12 \times 5 + 10\ln 5 + 11 = 25 - 60 + 10\ln 5 + 11 = 10\ln 5 - 24$$

5) Représentation graphique



6) Utilisons le théorème de bijection :

- La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}$) donc continue sur l'intervalle [2 ; 3].
- La fonction f est **strictement croissante** sur [ln 5 ; +∞[donc également sur l'intervalle [2 ; 3].
- On a : $f(2) = 2\,\mathbf{e}^4 - 12\,\mathbf{e}^2 + 31 \simeq -3{,}07 < 0$ et $f(3) = 2\,\mathbf{e}^6 - 12\,\mathbf{e}^3 + 41 \simeq 203{,}40 > 0$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 3].

On peut localiser α à l'aide de tableaux de valeurs

Tableau à 10^{-1} près en abscisses :

x	2	2,1	...	
$f(x)$	$-3{,}07 < 0$	$0{,}69 > 0$		

On a donc l'encadrement suivant : $2 < \alpha < 2{,}1$

Tableau à 10^{-2} près en abscisses :

x	2	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09
$f(x)$	–3,07	–2,76	–2,43	–2,09	–1,74	–1,37	–0,99	–0,60	$-0{,}18 < 0$	$0{,}25 > 0$

On a donc l'encadrement suivant : $\mathbf{2{,}08 < \alpha < 2{,}09}$

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut est : **2,08**.

Partie *C* *Un calcul d'intégrale*

1) Nous savons qu'une primitive de $u'\,\mathbf{e}^u$ est $\mathbf{e}^u$. En particulier, (avec $u(x) = 2x$), une primitive de $2x\,\mathbf{e}^{2x}$ est $\mathbf{e}^{2x}$. En divisant par 2, on obtient : une primitive de $\mathbf{e}^{2x}$ est $\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{2x}$.

On obtient alors : $$F(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^x + 5\,x^2 + 11x$$

(On a choisi une constante $k = 0$)

2) On a : $$I = \int_0^{\ln 8} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\ln 8) - F(0)$$

$$F(\ln 8) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{2\ln 8} - 12\,\mathbf{e}^{\ln 8} + 5(\ln 8)^2 + 11\ln 8 = \frac{1}{2} \times 64 - 12 \times 8 + 5(\ln 8)^2 + 11\ln 8 = -\,64 + 5(\ln 8)^2 + 11\ln 8$$

$$F(0) = \frac{1}{2} - 12 = -\frac{23}{2}$$

D'où : $$I = 5(\ln 8)^2 + 11\ln 8 - \frac{105}{2} \simeq -8{,}01 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

3) L'aire, en u.a. (unité d'aire), du domaine D délimité, par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \ln 8$ est donnée par $-I$.

Or, ici : 1 u.a. correspond à 5 cm².

Attention au signe ! L'intégrale d'une fonction **positive** correspond à une aire. Lorsque la fonction est négative, l'intégrale est négative... Pour obtenir l'aire, on change de signe !

Donc $$\text{Aire}(D) = -25(\ln 8)^2 - 55\ln 8 + \frac{525}{2} \simeq 40{,}0 \text{ cm}^2 \text{ à } 0{,}01 \text{ cm}^2 \text{ près}$$