

Problème sur les logarithmes

PARTIE A *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_g ?
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de g . Dresser le tableau de variation de g .
3. Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = e$.
4. Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$. En déduire, pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, le signe de $g(x)$.
5. Tracer C_g en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3.

PARTIE B *Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative*

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + ex - e.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(Unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Soit x appartenant à $]0 ; +\infty[$. Vérifier que $f'(x) = g(x)$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f en son point I d'abscisse 1.
Préciser la position de C_f par rapport à (T) .
5. Tracer (T) et C_f .

Problème sur les logarithmes : corrigé

Problème

PARTIE A Étude d'une fonction auxiliaire

1. Limite de g en 0 :

Écrivons : $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$.

On sait que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.

Comme g admet une limite **infinie** en 0 , on en déduit que C_g admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Limite de g en $+\infty$:

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite de référence) d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$.

Comme g admet une limite **finie** en $+\infty$, on en déduit que C_g admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = e$.

2. Dérivons la fonction g :

La fonction g est de la forme $g = \frac{u}{v} + k$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v(x) = x \\ k = e \text{ (constante)} \end{cases}$

On a donc $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2} + 0$. Ce qui donne :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Étudions le signe de g' . Pour $x > 0$, nous avons les équivalences suivantes :

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow \ln e \geq \ln x \Leftrightarrow e \geq x$$

La fonction g est donc croissante sur l'intervalle $]0 ; e]$ et décroissante sur l'intervalle $[e ; +\infty[$.

Tableau de variation de la fonction g :

x	0		e		$+\infty$
g'		+	0	-	
g	$-\infty$		$\frac{1}{e} + e$		e

$$g(e) = \frac{\ln e}{e} + e = \frac{1}{e} + e \approx 3,1$$

3. On a, pour $x > 0$, les équivalences suivantes :

$$g(x) = e \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Conclusion : $S = \{1\}$

4. $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} + e = -e \ln e + e = 0$. La fonction g s'annule pour $x = \frac{1}{e}$.

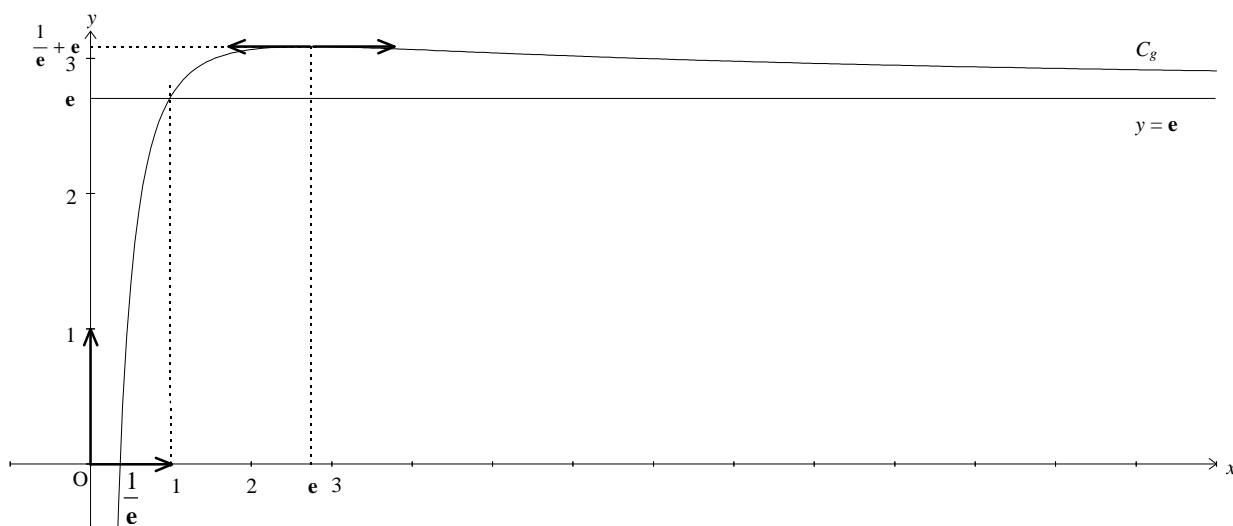
À l'aide de la question 2, nous en déduisons le signe de la fonction g :

pour $x \in]0 ; \frac{1}{e}[$, nous avons $g(x) < 0$

pour $x = \frac{1}{e}$, nous avons $g(x) = 0$

pour $x \in]\frac{1}{e} ; +\infty[$, nous avons $g(x) > 0$.

5. Représentation graphique :



PARTIE B Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

1. La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{2}u^2 + v$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v(x) = ex - e \end{cases}$.

Donc $f' = u'u + v'$, ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times \ln x + e = \frac{\ln x}{x} + e = g(x)$$

2. Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Puisque $f'(x) = g(x)$, nous avons d'après la question 4 de la partie A :

f décroissante sur $]0 ; \frac{1}{e}]$ et f croissante sur $[\frac{1}{e} ; +\infty[$

Tableau de variation de la fonction f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}(-\ln e)^2 + e \times \frac{1}{e} - e = \frac{3}{2} - e \simeq -1,2$	
f'		-	0		+
f	$+\infty$		$\frac{3}{2} - e$		$+\infty$

4. L'équation de la tangente (T) à C_f au point I d'abscisse x_0 est donnée par la formule :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ici on a : $x_0 = 1$; $f(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + e - e = 0$ et $f'(1) = g(1) = e$ d'où :

$$(T) : y = 0 + e(x - 1)$$

$$(T) : y = ex - e$$

Position de C_f par rapport à (T) : on étudie la différence entre $f(x)$ et $y = ex - e$:

$$f(x) - (ex - e) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e - ex + e = \frac{1}{2}(\ln x)^2 > 0$$

Cette différence étant strictement positive pour tout x strictement positif, on en déduit que :

La courbe C_f est située au dessus de la tangente (T) sur $]0 ; +\infty[$.

5. Représentations graphiques de (T) et C_f :

