PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

I) Définition et conséquences

<u>Définition</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

<u>Exemple</u> :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,x^2 - 2x + \cos x$. Trouver (mentalement) une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Solution : $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x$. En effet, $F'(x) = 3\,x^2 - 2x + \cos x = f(x)$. Remarquons que si l'on avait choisi pour F la fonction définie par $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x + 24$, nous aurions encore eu une candidate satisfaisante. Donc si une fonction f admet une primitive, alors elle en admet une infinité.

<u>Remarque</u> : la définition reste valable si I est une partie (non vide) de $\mathbb{R}$.

<u>Théorème 1</u>

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Nous admettrons pour le moment ce résultat qui affirme l'existence de primitives mais ne précise rien sur leur détermination.

<u>Théorème 2</u>

Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I.

Alors F et G diffèrent d'une constante : $F(x) = G(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ pour tout $x \in I$.

<u>Démonstration</u> :

Puisque F et G sont des primitives de f sur I, on a : $F' = G' = f$ sur I.

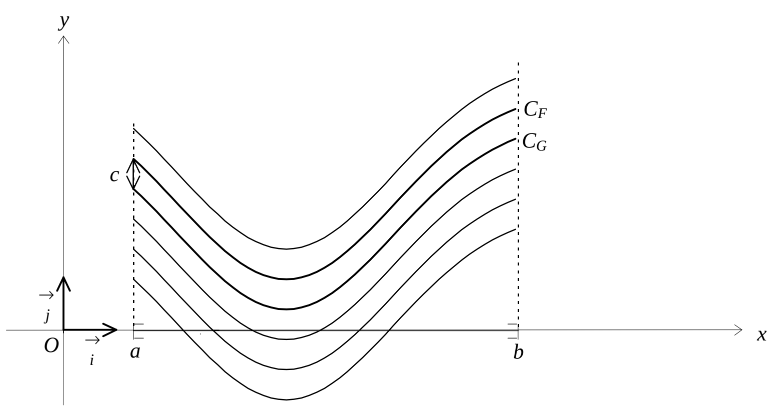
Par conséquent : $F' - G' = 0$ sur I. Or, $F' - G' = (F - G)'$ (c'est la linéarité de la dérivation).

Donc $(F - G)' = 0$ sur I.

Or, les seules fonctions qui ont une dérivée nulle sont les fonctions constantes ; donc on a, sur I, :

$$F - G = c \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Graphiquement, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques C_F et C_G se correspondent par une translation de vecteur $c\,\vec{j}$:



II) Primitive définie par une condition initiale

<u>Théorème 3</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $F(x_0) = y_0$.

<u>Démonstration</u> :

D'après le théorème 1, comme f est continue sur I, elle admet une primitive G sur I.

D'après le théorème 2, toutes les primitives F de f sur I sont de la forme $F = G + c$ (où c est une constante)

La condition $F(x_0) = y_0$ impose $c = y_0 - G(x_0)$.

La constante c est déterminée de manière unique, ce qui démontre le théorème.

<u>Exemple</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Trouver l'unique primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$, on reconnaît l'expression dérivée de $\sqrt{x^2+1}$.

Les primitives F de f sur I sont de la forme $F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$.

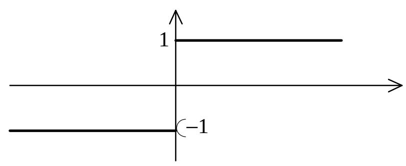
La condition initiale $F(0) = 2$ s'interprète par $\sqrt{0^2+1} + c = 2$ d'où $c = 1$.

Conclusion : la primitive cherchée est la fonction F définie par $F(x) = \sqrt{x^2+1} + 1$.

<u>Question</u> : une fonction non continue f peut-elle admettre des primitives sur ses intervalles de continuité ?

Réponse 1 : oui si f est continue par morceaux :

Par exemple : $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

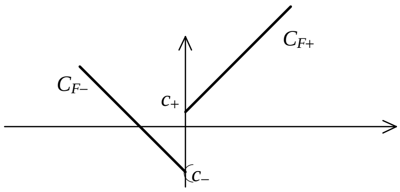


Sur $[0 ; +\infty[$, f admet des primitives F_+ de la forme : $F_+(x) = x + c_+$.

Sur $]-\infty, 0[$, f admet des primitives F_- de la forme : $F_-(x) = -x + c_-$.

Notons que l'on peut très bien choisir $c_+ \neq c_-$.

On peut alors construire une fonction F sur $\mathbb{R}$ qui est continue par morceaux : $F(x) = \begin{cases} x + c_+ \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x + c_- \text{ sinon} \end{cases}$



On peut même s'arranger pour que F soit continue, il suffit de recoller les morceaux en choisissant $c_+ = c_-$.

Cependant, F n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car non dérivable en 0.

Réponse 2 : non si f admet une infinité de discontinuités :

Par exemple : $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

III) Tableau des primitives usuelles

Les résultats de ces tableaux s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F (c = constante)	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $]-\infty\,;0\,[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ?$ (Attendre le chapitre sur la fonction logarithme néperien)	

<u>Exemples</u> : trouver une primitive :

- $g(x) = \tan^2 x$.

  Posons $h(x) = g(x) + 1 = 1 + \tan^2 x$. Une primitive H de h est : $H(x) = \tan x = G(x) + x$ où G est une primitive de g.

  D'où $G(x) = H(x) - x = \tan x - x$

- $f(x) = 2\sin(3x) - 3\cos(2x) + 4 + \tan^2 x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$ pour $x \in \,]0\,;\frac{\pi}{2}[$

  $F(x) = -\frac{2}{3}\cos(3x) - \frac{3}{2}\sin(2x) + 3x + \tan x - 6\sqrt{x} - \frac{2}{x}$ $(+\,c)$

OPÉRATIONS SUR LES PRIMITIVES lorsque u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I		
Fonction	une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k : constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{v'}{v^2}$	$-\dfrac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'\,(v' \circ u)$	$v \circ u$	

<u>Exemple</u> :

Trouver une primitive F de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(voir la définition de la fonction ln dans le chapitre sur le logarithme néperien)

La fonction f est de la forme $u'\,u$. Donc F est de la forme $\dfrac{1}{2}u^2$: $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ $(+\,c)$

<u>Exercice</u> :

Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.

Calculer $F'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?