

PROBABILITÉS (discrètes)

Rappel : soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. (Ensemble de toutes les issues ou futurs possibles). Dans notre étude, Ω est un ensemble fini. Les éléments de $\wp(\Omega)$ s'appellent des événements. En particulier, les singletons de $\wp(\Omega)$ (qui s'identifient aux éléments de Ω) s'appellent les événements élémentaires. Une probabilité P sur Ω est une application de $\wp(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$ qui vérifie les deux conditions : $P(\Omega) = 1$ et $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ pour toute famille A_1, A_2, \dots, A_n d'événements deux à deux disjoints. (Propriété d'additivité). Le triplet $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ s'appelle alors un espace probabilisé discret.

1) Probabilités conditionnelles

1) Exemples et définition

Exemple : un joueur tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

On considère les événements suivants :

F = "la carte tirée est une figure"

R = "la carte tirée est un roi"

- 1) Calculer $P(F)$, $P(R)$ et $P(R \cap F)$ (où P désigne la probabilité correspondant à l'équirépartition)
- 2) Le joueur affirme : "la carte tirée est une figure". Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?

Solution :

- 1) Ici, l'univers Ω est constitué de 32 événements élémentaires équiprobables. On a donc :

$$P(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} ; P(R) = \frac{\text{Card}(R)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ et } P(R \cap F) = \frac{\text{Card}(R \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

- 2) Maintenant, nous n'avons plus l'équiprobabilité sur Ω . Les seuls événements de probabilité non nulle sont ceux qui sont constitués d'une partie des 12 figures du jeu de cartes. Nous allons choisir une nouvelle probabilité P_F qui sera nulle pour les événements élémentaires ne correspondant pas à une figure et équirépartie pour les événements élémentaires correspondant à une figure. Pour déterminer la probabilité que la carte soit un roi, nous devons seulement considérer les rois qui sont des figures, donc compter les éléments de $R \cap F$, si bien que :

$$P_F(R) = \frac{\text{Card}(R \cap F)}{\text{Card}(F)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité $P_F(R)$ s'appelle la **probabilité conditionnelle de R par rapport à F** . On la note encore $P(R|F)$ où $R|F$ représente l'événement " **R est réalisé**" sachant que **F est réalisé**.

Nous remarquons que $P(R|F) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$. Généralisons ce résultat :

Théorème 1

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω (avec Ω de cardinal fini), P une probabilité sur Ω et B un événement non P -impossible. L'application P_B de $\wp(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$ définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ pour tout } A \in \wp(\Omega)$$

est une probabilité sur Ω .

Démonstration :

$$\text{On a : } P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des événements (donc des éléments $\wp(\Omega)$) deux à deux disjoints. On a :

$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\right)}{P(B)}$$

Or, les événements $A_i \cap B$ sont deux à deux disjoints puisque les A_i le sont, donc :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

$$\text{D'où : } P_B\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^n \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^n P_B(A_i)$$

L'application P_B est bien une probabilité, le théorème est donc démontré.

Définition 1

L'application P_B ainsi définie s'appelle "probabilité B -conditionnelle". On note souvent (et abusivement) $A|B$ l'événement "**A est réalisé**" sachant que B l'est. On note aussi $P(A|B)$ au lieu de $P_B(A)$. On a ainsi :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarques :

- la relation ci-dessus est très utile également dans l'autre sens :

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) (= P(B|A) P(A))$$

- l'événement contraire de $A|B$ est $\bar{A}|B$ ("A n'est pas réalisé" sachant que B l'est).

- cas particulier : si $A \subset B$. Alors, $P(A) \leq P(B)$ et $P(A \cap B) = P(A)$. D'où $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

Exemple :

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?

Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade $P(M)$ avec celle d'être malade sachant que l'on a été vacciné $P(M|V)$.

$$\text{On a : } P(V) = \frac{1}{3} \text{ et } P(V|M) = \frac{2}{15}$$

On peut aussi comparer $P(M|V)$ et $P(M|\bar{V})$,

on trouve : $P(M|\bar{V}) = 3,25 P(M|V)$

$$P(M|V) = \frac{P(M \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|M)P(M)}{P(V)} = \frac{2}{15} \times 3 P(M) = \frac{2}{5} P(M)$$

On a $P(M|V) < P(M)$. Le vaccin est donc efficace.

On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?

On a donc : $P(M|V) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$

Or, $P(M|V) = \frac{2}{5} P(M)$ d'où : $P(M) = \frac{1}{5}$

Il y a donc 20% de malades.

2) Indépendance de deux événements

Définition 2

Soit P une probabilité sur un univers Ω . On dit que deux événements A et B (non impossibles) sont P -indépendants si la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre :

$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B).$$

Conséquence : soient A et B des événements non impossibles.

- Si A et B sont indépendants, alors :

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B)$$

- Réciproquement, si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ alors on a :

$$P(A|B) P(B) = P(A) P(B) \text{ d'où } P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) P(A) = P(A) P(B) \text{ d'où } P(B|A) = P(B)$$

Les événements A et B sont donc indépendants.

Ne pas confondre l'indépendance et l'incompatibilité de deux événements : si on lance un dé et si on considère les événements $A =$ "obtenir un nombre pair" et $B =$ "obtenir un nombre impair" alors A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) et dépendants ($P(A) = P(B) = 0,5$ alors que $P(A \cap B) = 0$)

Ce qui fournit un bon critère pour savoir si deux événements sont indépendants :

Théorème 2

Deux événements A et B sont P -indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Exemples :

- On lance deux dés et on désigne par A l'événement "le premier dé amène un nombre pair", par B l'événement "le deuxième dé amène un nombre impair" et par C l'événement "les deux dés amènent un nombre pair".

$$\text{On a : } P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}; P(C) = \frac{1}{4}; P(A \cap B) = \frac{1}{4}; P(A \cap C) = \frac{1}{2}; P(B \cap C) = 0. \text{ (Arbres)}$$

On conclut : A et B sont indépendants ; A et C sont dépendants ; B et C sont dépendants.

- On lance une pièce deux fois de suite et on considère les événements $A_1 =$ "FACE au premier lancer" et $A_2 =$ "FACE au second lancer". On a $\Omega = \{FF; FP; PF; PP\}$. $P(A_1) = 0,5$; $P(A_2) = 0,5$; $P(A_1 \cap A_2) = 0,25$. Les événements sont indépendants, ce qui est rassurant.
- Deux événements A et B non impossibles et incompatibles sont toujours dépendants puisque $P(A \cap B) = 0$ et $P(A).P(B) \neq 0$.

Remarque : il faut être méfiant avec la notion d'indépendance. Deux événements peuvent intuitivement sembler indépendants sans pour autant l'être après calculs. Par exemple, considérons l'expérience suivante :

Quatre lots sont répartis entre 5 personnes P_1, \dots, P_5 de la façon suivante : chaque lot est attribué par tirage au sort d'une personne parmi les 5.

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est l'ensemble des 4-listes de $\{P_1; \dots; P_5\}$. Il y en a 5^4 .

Pour tout $k \in \llbracket 1 ; 5 \rrbracket$, notons E_k l'événement décrit par "la personne P_k ne reçoit aucun lot".

Les événements E_k , $1 \leq k \leq 5$, sont-ils indépendants ? Réponse : non.

En effet, soient h et k distincts compris entre 1 et 5.

L'événement E_k est constitué des 4-listes de $\{P_1 ; \dots ; P_5\} \setminus \{P_k\}$. Il y en a 4^4 .

Avec la probabilité uniforme P sur Ω , on a : $P(E_k) = \frac{4^4}{5^4}$. De même $P(E_h) = \frac{4^4}{5^4}$.

$E_k \cap E_h$ est constitué des 4-listes de $\{P_1 ; \dots ; P_5\} \setminus \{P_k ; P_h\}$. Il y en a 3^4 . Donc $P(E_k \cap E_h) = \frac{3^4}{5^4}$

Et comme $P(E_k).P(E_h) = \frac{4^4}{5^4} \times \frac{4^4}{5^4}$, on a : $P(E_k \cap E_h) \neq P(E_k).P(E_h)$

3) Formule des probabilités totales

Théorème 3

Si des parties (non vides) B_1, B_2, \dots, B_n constituent une partition d'un univers Ω muni d'une probabilité P , alors pour tout événement A , on a :

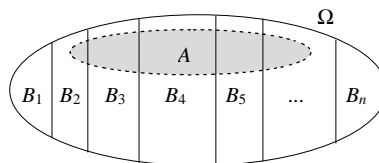
$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k) P(B_k)$$

Démonstration :

Les ensembles $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ constituent une partition de A : $A = \coprod_{k=1}^n A \cap B_k$ (union disjointe).

D'après l'additivité de la probabilité pour les ensembles disjoints on a : $P(A) = P\left(\coprod_{k=1}^n A \cap B_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k)$

Et comme $P(A \cap B_k) = P(A/B_k) P(B_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k) P(B_k)$.



Remarques :

- La formule des probabilités totales reste vraie si B_1, B_2, \dots, B_n sont des événements deux à deux incompatibles et si $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$.
- On a en particulier : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

Exemples :

- Reprenons l'exemple de l'épidémie et cherchons la probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade : Nous cherchons donc $P(M|\bar{V})$. Il est clair que V et \bar{V} constituent une partition de l'ensemble de la population. D'après la formule des probabilités totales, on a : $P(M) = P(M|V) P(V) + P(M|\bar{V}) P(\bar{V})$, d'où :

$$P(M|\bar{V}) = \frac{P(M) - P(M|V)P(V)}{1 - P(V)} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{2}{25} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{13}{50} = 0,26$$

- Le feu tricolore. Un automobiliste arrive à proximité -disons une dizaine de mètres- d'un feu tricolore. On suppose qu'aucun véhicule ne le précède. On suppose que, si le feu est vert à ce moment là, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 99/100. Si le feu est orange, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 3/10 et enfin si le feu est rouge, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 1/100 (quelques fous...). Le cycle du feu tricolore dure une minute : vert : 25s, orange : 5s et rouge : 30s.

Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore ?

Soient A l'événement "l'automobiliste passe sans s'arrêter au feu" et V (resp. O et R) = "le feu est vert (resp. orange et rouge)".

Comme $V \cup O \cup R = \Omega$ (union disjointe), on a :

$$P(A) = P(A|V)P(V) + P(A|O)P(O) + P(A|R)P(R) = \frac{99}{100} \times \frac{5}{12} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} = \frac{177}{400} < \frac{1}{2} \dots$$

II) Variable aléatoire

1) Définition et loi de probabilité

Définition 3

Lorsqu'à chaque événement élémentaire ω d'un univers Ω (fini) on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire (réelle). Une variable aléatoire est donc une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est constitué de 8 événements élémentaires (nombre de 3-listes de l'ensemble $\{P ; F\}$) :

$$\Omega = \{PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF ; FPF ; FFP ; FFF\}$$

Ces huit issues sont équiprobables.

Désignons par X le nombre de "face" obtenus. X est une variable aléatoire qui prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3

On notera, par exemple " $X = 2$ " l'événement "face est sorti deux fois". Plus précisément :

$$"X = k" = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = k\} = X^{-1}(k)$$

Remarque : on n'a pas besoin de probabilité pour définir une variable aléatoire.

Définition 4

Soit P une probabilité sur un univers Ω . Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$) d'une variable aléatoire X on associe les probabilités p_i de l'événement " $X = x_i$ ", on dit que l'on définit la loi de probabilité P_X de la variable aléatoire X (selon P).

Remarque : On peut montrer que l'application P_X vue comme application de

$$\begin{aligned} \wp(X(\Omega)) &\rightarrow [0 ; 1] \\ A &\mapsto \sum_{x \in A} P(X^{-1}(x)) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$. En effet :

$$P_X(X(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X^{-1}(x)) = P\left(\prod_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(x)\right) = P(\Omega) = 1 \text{ (car } P \text{ est une probabilité sur } \Omega)$$

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des événements (éléments $\wp(X(\Omega))$) deux à deux disjoints, on a :

$$P_X\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{x \in \prod_{i=1}^n A_i} P(X^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in A_i} P(X^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^n P_X(A_i)$$

On a donc bien montré que P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

En pratique la loi de probabilité est présentée sous forme de tableau. Par exemple :

Valeur x_i de la variable aléatoire X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
Probabilité p_i de l'événement " $X = x_i$ "	$p_1 = \frac{1}{8}$	$p_2 = \frac{3}{8}$	$p_3 = \frac{3}{8}$	$p_4 = \frac{1}{8}$

On notera, par exemple $P(X = 2) = \frac{3}{8}$. On remarquera que l'on a bien $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Autre exemple : toujours avec le lancer d'une pièce 3 fois de suite.

Posons cette fois $Y = \begin{cases} 1 & \text{si deux faces identiques apparaissent successivement} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a :

Valeurs k de Y	0	1
$P(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

2) Espérance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 5

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

l'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i

La variance de la variable aléatoire X est le nombre, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : La variance est une quantité positive, donc l'écart type est bien défini.

Exemples :

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. X désigne le nombre de "face" obtenu.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = (0 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{1}{8} + (1 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{3}{8} + (2 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{3}{8} + (3 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

D'où :
$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De même :

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$V(Y) = (0 - \frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4} + (1 - \frac{3}{4})^2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\sigma(Y) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Interprétation : lorsque X représente le gain à un jeu de hasard, $E(X)$ représente l'espoir de gain moyen par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. Si $E(X) > 0$ (resp. $E(X) < 0$) alors le jeu est avantageux (resp. désavantageux). Si $E(X) = 0$ alors le jeu est dit équitable.

L'écart-type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X .

Exercice : démontrer que l'espérance $E(X)$ minimise la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 p_i$$

mais pas la fonction g définie par :

$$g(x) = \sum_{i=1}^n |x_i - x| p_i$$

La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x) p_i = -2 \sum_{i=1}^n x_i p_i - 2x \sum_{i=1}^n p_i = -2(E(X) - x)$$

On en déduit :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq E(X)$$

Donc f admet un minimum en $E(X)$ (et ce minimum est $f(E(X)) = V(X) \dots$)

L'espérance est donc la quantité qui minimise la moyenne des carrés des écarts.

Par contre, elle ne minimise pas la moyenne des écarts. En effet, considérons la variable aléatoire X définie par la loi suivante :

x_i	0	1000
p_i	0,9	0,1

On a :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 100$$

$$g(E(X)) = |x_1 - 100| p_1 + |x_2 - 100| p_2 = 90 + 90 = 180$$

Or :

$$g(0) = E(X) = 100$$

Donc :

$$g(0) < g(E(X))$$

Conclusion : $E(X)$ ne minimise pas la fonction g .

3) Propriété de linéarité de l'espérance

Théorème 4

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies pour une même expérience aléatoire, on a :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(kX) = kE(X) \text{ pour tout réel } k$$

Exemple :

On lance 4 dés, et on note S la somme des résultats obtenus. Calculer $E(S)$.

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 les résultats obtenus pour chaque dé. On a :

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$$

Or, $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, d'où :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 4E(X_1) = 4 \times 3,5 = 14$$

Démonstration :

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^n y_i p_i = E(X) + E(Y)$$

$$E(kX) = \sum_{i=1}^n kx_i p_i = k \sum_{i=1}^n x_i p_i = kE(X)$$

Théorème 5

La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

la variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne

Démonstration : remarquons que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X = k$ est égale à la constante k .

D'après la linéarité de l'espérance :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2E(1)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemple :

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. X désigne le nombre de "face" obtenu.

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

4) Fonction de répartition

Définition 6

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition F associée à X est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

La fonction de répartition est toujours une fonction croissante et bornée par 0 et 1.

Exemple : avec toujours les mêmes données précédentes, on a :

Pour $x \in]-\infty ; 0[$, on a :

$$F(x) = 0$$

Pour $x \in [0 ; 1[$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8}$$

Pour $x \in [1 ; 2[$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

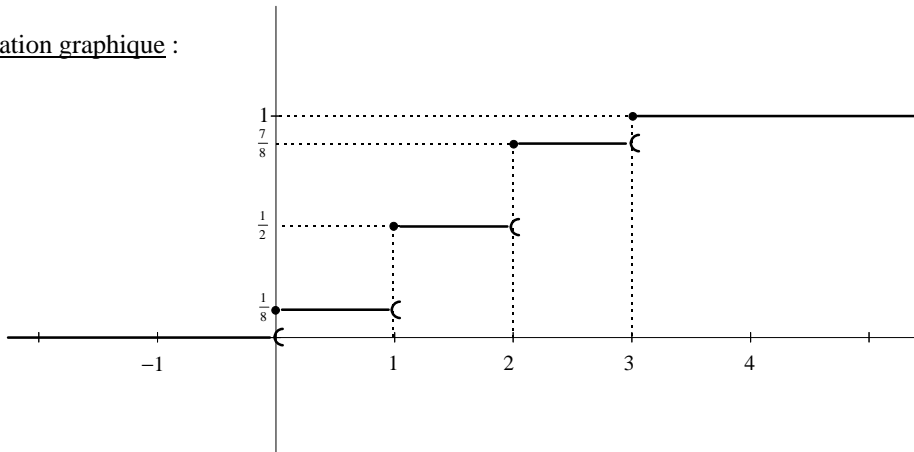
Pour $x \in [2 ; 3[$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

Pour $x \in [3 ; +\infty[$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

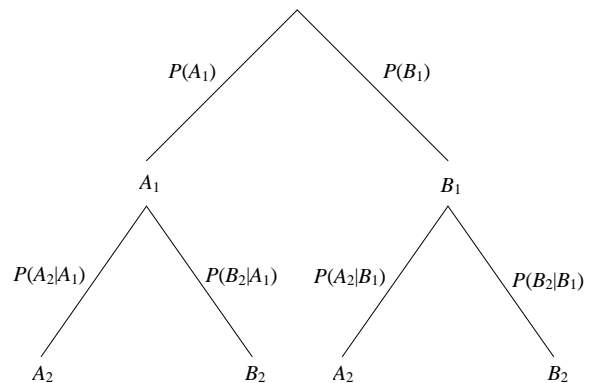
Représentation graphique :



III) Arbres

Voici trois règles pratiques pour calculer des probabilités directement sur des arbres (règles qui sont en relation avec des résultats du cours ci-dessus) :

Exemple de situation où l'on réitère deux fois une expérience comportant deux issues A et B contraires l'une de l'autre. On note A_1 (resp. A_2) l'événement "A se réalise à la première (resp. deuxième) expérience". Mêmes notations pour B . L'univers associé à cette situation comporte 4 issues : $\Omega = \{A_1A_2 ; A_1B_2 ; B_1A_2 ; B_1B_2\}$



R1 : la somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1 :

Exemple : $P(A_1) + P(B_1) = 1$ (ceci provient du fait que A et B sont contraires)

R2 : la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin :

Exemple : la probabilité du chemin A_1A_2 est : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) P(A_1)$ (formule de probabilité conditionnelle)

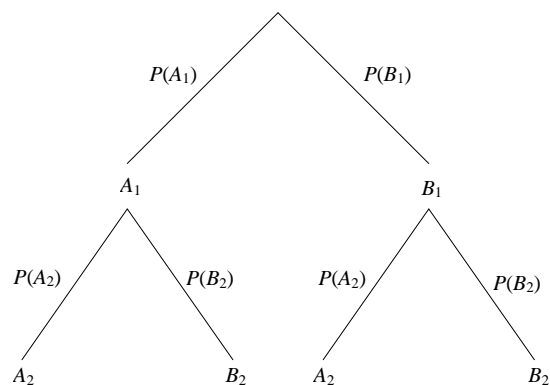
R3 : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

Exemple : La probabilité de l'événement "obtenir exactement une fois A" est : $P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2)$

Lien avec l'indépendance : si on suppose que les deux expériences se déroulent de manière indépendante. On a alors l'arbre suivant :

La probabilité du chemin A_1A_2 sera donc $P(A_1)P(A_2)$

Cas particulier : si on répète n fois, de manière indépendante une expérience. La probabilité p qu'un événement A de cette expérience se réalise n fois sera : $p = (P(A))^n$.



Applications :

- On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3). Quelle est la probabilité que la somme *dé + jeton (éventuel)* soit égale à 5 ?
- Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
- Le lièvre et la tortue : on lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant en suivant les cases ci-dessous. Quelle est la situation la plus enviable : celle du lièvre ou de la tortue ?

