THÉORIE DES ENSEMBLES

Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles (finis, infinis dénombrables, infinis non dénombrables). Le but de ce chapitre n'est pas de faire une étude systématique de la théorie des ensembles (qui s'avérerait très complexe) mais de proposer une *approche* des notions les plus utilisées de cette théorie.

Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble. Disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un propriété commune (par exemple l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers), l'ensemble des polynômes de degré 2, etc ...). On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel.

Un ensemble se note avec des accolades : par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9, on notera $E = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$.

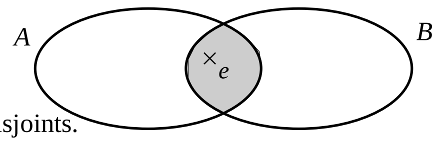
On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble : par exemple $2 \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ et $3 \notin \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$.

Enfin, nous noterons $\varnothing$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Intersection

<u>*Définition*</u> *: L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A* ***et*** *B. On la note $A \cap B$.*

$e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$

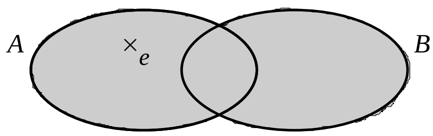


<u>Remarque</u> : lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Réunion (ou union)

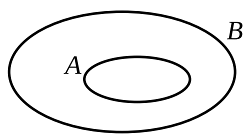
<u>*Définition*</u> *: La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A* ***ou*** *dans B. On la note $A \cup B$.*

$e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$



Inclusion

<u>*Définition*</u> *: On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$.*



On dit alors que A est une "partie" de B ou que A est un "sous-ensemble" de B.

<u>Remarque</u> : $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

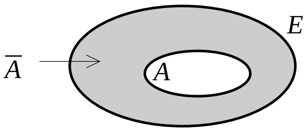
On notera $\wp(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

<u>Exemples</u> : on a toujours : $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$; $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$; $A \cap B \subset A \cup B$.

$$\varnothing \subset A \;;\; \varnothing \cap A = \varnothing \;;\; \varnothing \cup A = A$$

Complémentaire

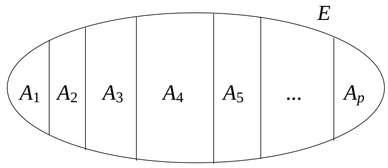
Définition : Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note E \ A ou $\overline{A}$ *ou encore* $C_E(A)$.



Remarque : $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Partition

Définition : Des parties $A_1, A_2, A_3, ..., A_p$ *d'un ensemble E constituent une partition de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E .*



Pour tous i et j de $\{1 ; ... ; p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p = E$

Exercice : combien de partitions peut-on faire avec un ensemble à 3 éléments ? Et à 4 éléments ?

Produit cartésien

Définition : Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où x appartient à E et y appartient à F. Cet ensemble est noté $E \times F$.

Exemples :

- Si $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{1 ; 2\}$ alors $E \times F = \{(a, 1) ; (a, 2) ; (b, 1) ; (b, 2) ; (c, 1) ; (c, 2)\}$.
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ également noté $\mathbb{R}^2$.

Le produit cartésien se généralise à plusieurs ensembles : $E_1 \times E_2 \times ... E_p$. Les éléments sont des p-uplets.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition : Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. Ce nombre est noté Card(E). On convient que $Card(\varnothing) = 0$.

Exemple :

Si $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ alors Card$(E) = 6$.

Remarque :

La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc...).

Exercice

Soit A l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 qui sont pairs.

Soit B l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 qui sont divisibles par 3.

1. Donner les éléments de $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Décrire un ensemble C qui soit inclus dans B.
3. Décrire $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
4. Trouver un ensemble D tel que A et D soient disjoints.
5. On note $D = A \cap B$. Décrire l'ensemble $B \times D$. Quel est son cardinal ?