

1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°1 (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$.

1. Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
2. Démontrer que f est minorée par 2 sur \mathbb{R} .
3. Résoudre l'équation $f(x) = 5$.
4. Déterminer deux fonctions g et h telles que $f = g \circ h$.

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f .
4. Démontrer que la fonction f est majorée par 2 sur D_f . (On pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$)

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^4$$

1. Démontrer que, quels que soient les réels X et Y , on a : $X^4 - Y^4 = (X - Y)(X + Y)(X^2 + Y^2)$.
2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. Étudier la parité de f . En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty ; 0]$.

Exercice 4 (6 points)

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = 1,0000002 \text{ et } B = \sqrt{1,0000004}$$

1. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

- a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?
 - b) Vérifier que $f(4 \times 10^{-7}) = B$. Que vaut $g(4 \times 10^{-7})$?
2. Pour comparer les nombres A et B , on va comparer les fonctions f et g .
 - a) Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$.
 - b) Calculer $[f(x)]^2$ et $[g(x)]^2$.
 - c) Démontrer que $[f(x)]^2 < [g(x)]^2$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$
 - d) En déduire que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$
 - e) Conclure.

1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°2 (1 heure)

Exercice 1 (3 points)

[AX] est un segment de longueur 5 cm.

1. I est le barycentre de $(A, 2)$ et $(X, 3)$. Établir une relation vectorielle permettant de construire facilement I . Placer I sur la droite (AX) .
2. P est le symétrique de X par rapport à A . Placer P sur la droite (AX) . Déterminer des coefficients α et β tels que P soit le barycentre de (A, α) et (X, β) .

Exercice 2 (4 points)

Résoudre les équations suivantes :

1. $(x - 2)(x + 5) = 0$
2. $x^2 + 3x = 0$
3. $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$
4. $2(2x + 1)^4 - (2x + 1)^2 - 6 = 0$ (On pourra poser $X = (2x + 1)^2$)

Exercice 3 (6 points)

1. Étudier le signe de $x^2 + 10x + 25$ et celui de $-2x^2 - 7x - 3$. (On pourra éventuellement faire des tableaux)
2. En déduire le signe de $\frac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3}$, puis les solutions de l'inéquation $\frac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3} < 0$.

Exercice 4 (2 points)

Soit P la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Démontrer que :

Si a et c sont de signes opposés, alors P admet au moins une racine réelle

Exercice 5 (3 points)

Les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle sont trois entiers consécutifs. Trouver ces trois longueurs.

Exercice 6 (2 points)

Dans cet exercice, on admettra que le nombre de façons de choisir 2 objets parmi n est : $\frac{n(n-1)}{2}$

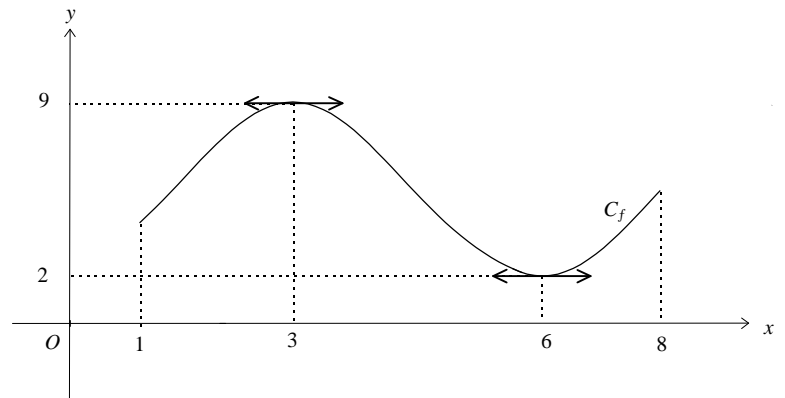
Une compagnie aérienne assure toutes les liaisons possibles entre un certain nombre de villes. On sait qu'il y a 45 liaisons en service. Quel est le nombre de villes desservies par cette compagnie aérienne ?

1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°4 (1 heure)

Exercice 1 (3 points)

Ci-contre est donnée la courbe C_f représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 8]$.

- Par lecture graphique, donner, sans justifier, la valeur de : $f(3)$; $f'(3)$; $f(6)$; $f'(6)$
- Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$. Préciser néanmoins son signe. (Expliquer)



Exercice 2 (9 points)

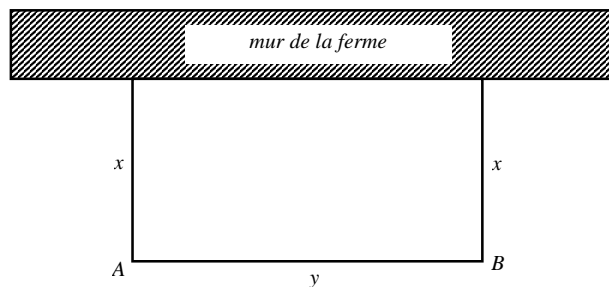
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note C_f sa représentation graphique.

- Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Calculer la dérivée f' de f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
- Tracer T et C_f (dans un même repère). (On se limitera à l'intervalle $[-2 ; 2,5]$ et on choisira 2 cm par unité sur chaque axe)
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.

Donner une valeur approchée de α , par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 3 (6 points)

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2 . Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?



La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B . (On a donc $x > 0$ et $y > 0$)

- Sachant que l'aire du poulailler est 392 m^2 , exprimer y en fonction de x .
- Démontrer que la longueur $\ell(x)$ du grillage est : $\ell(x) = \frac{2x^2 + 392}{x}$.
- Calculer la dérivée ℓ' de ℓ . En déduire le tableau de variation de ℓ .
- En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

Exercice 4 (2 points)

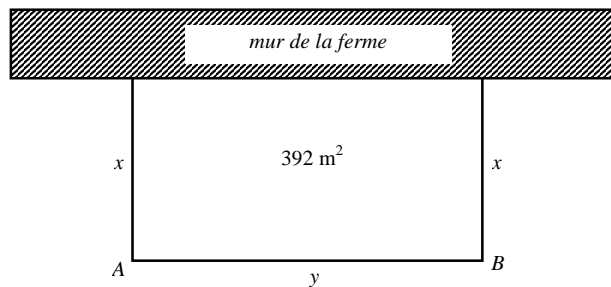
Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur I .

Démontrer que $f \leq g$ sur I . (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Comme $f(2,1) < 0$ et $f(2,2) > 0$, on a : $2,1 < \alpha < 2,2$.

Une valeur approchée de α , par défaut, à 10^{-1} près est donc : $\alpha \simeq 2,1$.

Exercice 3 (6 points)



1. Puisque l'aire du poulailler est 392 m^2 on a : $xy = 392$ d'où : $y = \frac{392}{x}$.
2. La longueur $\ell(x)$ du grillage est : $\ell(x) = 2x + y = 2x + \frac{392}{x} = \frac{2x^2 + 392}{x}$.
3. La fonction ℓ est du type $\ell = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x^2 + 392 \\ v(x) = x \end{cases}$. Donc $\ell' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ce qui donne :

$$\ell'(x) = \frac{4x \times x - (2x^2 + 392)}{x^2} = \frac{2x^2 - 392}{x^2} = \frac{2(x^2 - 196)}{x^2} = \frac{2(x-14)(x+14)}{x^2}$$

Comme $x > 0$, le signe de ℓ' ne dépend que de celui de $x - 14$:

x	0	14	$+\infty$	
Signe de $x - 14$	—	0	+	
Signe de $x + 14$	+		+	
Signe de x^2	0	+	+	
Signe de la dérivée ℓ'		—	0	+
Variations de ℓ		$+\infty \swarrow \searrow +\infty$ 		
		56		

Minimum local (ou relatif) de ℓ en 14 : $\ell(14) = 56$

4. La clôture a une longueur minimale lorsque $x = 14$ et $y = \frac{392}{14} = 28$. Cette longueur minimale est $\ell(14) = 56$.

Exercice 4 (2 points)

Calculons la dérivée de la fonction $g - f$: $(g - f)' = g' - f'$.

Comme $f' \leq g'$ sur I , on a : $g' - f' \geq 0$ sur I . La fonction $g - f$ est donc croissante sur I . Ce qui signifie :

$$\text{pour tous réels } u \text{ et } v \text{ de } I : u < v \Rightarrow (g - f)(u) \leq (g - f)(v)$$

C'est-à-dire : pour tous réels u et v de I : $u < v \Rightarrow g(u) - f(u) \leq g(v) - f(v)$

En particulier avec $u = 0$, on a : pour tout v de I : $g(0) - f(0) \leq g(v) - f(v)$

Et comme $f(0) = g(0)$: pour tout v de I : $0 \leq g(v) - f(v)$

C'est-à-dire : pour tout v de I : $0 \leq g(v) - f(v)$

Ce qui signifie : $f \leq g$ sur I

IS₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°5 (1 heure)

Dans tout ce devoir, les angles sont mesurés en **radians**.

Les repères considérés sont tous **orthonormés**.

Exercice 1 (4 points)

θ est un angle dont la mesure principale est située dans $[\frac{\pi}{2}; \pi]$. On sait que $\sin \theta = \frac{4}{5}$.

Calculer $\cos \theta$ et $\tan \theta$.

Exercice 2 (6 points)

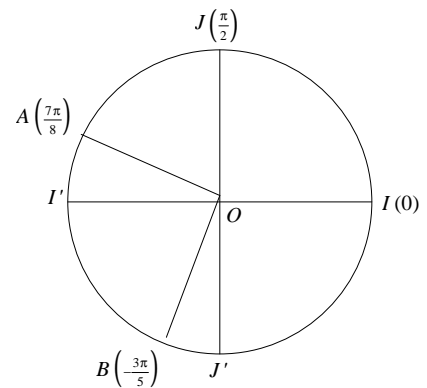
Sur un cercle trigonométrique \mathcal{C} , on considère les points A et B tels que :

$$(\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{7\pi}{8} \quad \text{et} \quad (\vec{OI}, \vec{OB}) = -\frac{3\pi}{5}$$

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

$$(\vec{OA}, \vec{OJ}) ; (\vec{OJ}, \vec{OB}) ; (\vec{OB}, \vec{OA})$$

(On pourra utiliser la relation de Chasles)



Exercice 3 (7 points)

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A et B dont les **coordonnées polaires** sont :

$$A(2; 0) \quad B(2; \frac{\pi}{6})$$

On considère également le point C dont les **coordonnées cartésiennes** sont : $C(-\sqrt{3}; -1)$

1. Préciser, sans justification les coordonnées cartésiennes de A .
2. Calculer les coordonnées cartésiennes de B .
3. Calculer les coordonnées polaires de C .
4. Justifier que les points A , B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
5. Placer, précisément, les points A , B et C sur une figure.
6. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Justifier)

Exercice 4 (3 points)

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Démontrer que : $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$.

2. En déduire que $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

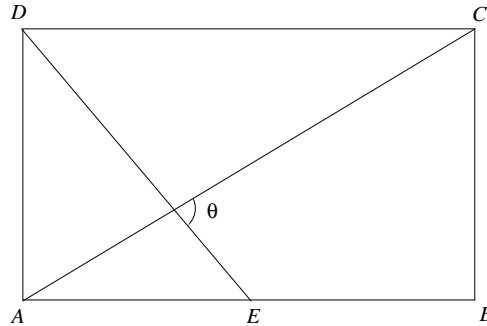
1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°6 (1 heure)

Dans tout ce devoir, les repères considérés sont **orthonormés**.

Exercice 1 (8 points)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.

E est le milieu de $[AB]$.



1. Calculer les longueurs AC et DE .
2. En exprimant chacun des vecteurs \vec{AC} et \vec{DE} en fonction des deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} , calculer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle orienté $\theta = (\vec{DE}; \vec{AC})$ arrondie à 0,01 degré près.

Exercice 2 (4 points)

On se place dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$ où $A(1; 2)$ et $B(-1; 3)$.

1. Déterminer une équation de \mathcal{C} .
2. Déterminer son rayon r et les coordonnées de son centre Ω .

Exercice 3 (4 points)

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

$$\text{Rappel : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

2. Calculer en développant : $(\vec{AD} - \vec{AB})^2$.
3. En déduire BD .

Exercice 4 (4 points)

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$.

Démontrer que ce triangle est rectangle en B .

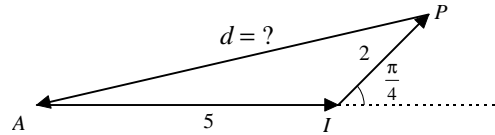
1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°7 (1 heure)

Dans tout ce devoir, les repères considérés sont **orthonormés**.

Exercice 1 (3 points)

Un promeneur marche 5 km en direction de l'Est, puis 2 km en direction du Nord-Est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant.

Sur quelle distance d a-t-il couru ?



(On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 0,01 km près)

Exercice 2 (9 points)

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne $A(-2 ; 2)$ et $B(2 ; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = 4$.
4. Déterminer une équation du cercle (C) .
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(\sqrt{7} ; \lambda)$ soit sur (C) ?
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en Z .

Si vous n'arrivez pas à faire la question 2 ou la question 3, vous pouvez quand même faire la suite de l'exercice

Exercice 3 (4 points)

1. Résoudre, dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation : $\sin x = \sin(2x)$
Représenter les éventuelles solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Existe-t-il un angle aigu θ , non nul, ayant même sinus que 2θ ?

Exercice 4 (4 points)

Dans cet exercice, on donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Mini formulaire de trigonométrie

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Exercice 1 (3 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Calculer les dérivées des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (\cos x)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$g(x) = (3x + 5)\sqrt{x} \quad (x > 0)$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x+7}{4-x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 - \sqrt{x})$$

(Rappel : $x \rightarrow 4^+$ signifie : $x \rightarrow 4$ et $x > 4$)

3) On note C la courbe représentative de la fonction f , définie sur \mathbb{R} , par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$.

Déterminer les coordonnées des points éventuels en lesquels la tangente à C a pour coefficient directeur 6.

Exercice 2 (4 points)

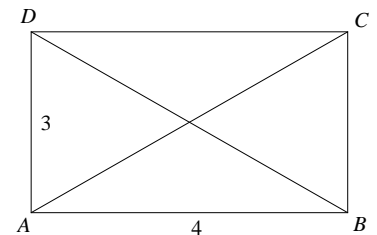
$ABCD$ est un rectangle de sens direct. On donne : $AD = 3$ et $AB = 4$.

1) Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$.

2) On note A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD) .

Démontrer que : $\vec{A'C'} \cdot \vec{BD} = -7$.

3) Calculer $A'C'$.



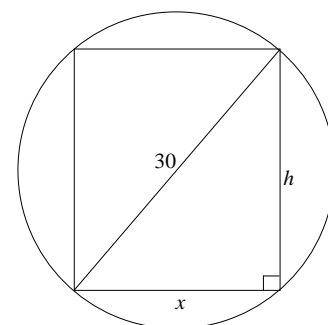
Exercice 3 (5 points)

Lorsqu'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire carrée mais toujours plus haute que large.

Si la base est x et la hauteur h , on montre en mécanique que la résistance à la flexion est proportionnelle au produit xh^2 . (Plus xh^2 est grand, plus la résistance est grande).

On dispose d'un tronc de 30 cm de diamètre et on veut fabriquer une poutre présentant le maximum de résistance à la flexion.

Sur le schéma ci-contre, le rectangle représente la section de la poutre et le disque la section du tronc.



1) Exprimer xh^2 en fonction de x seul.

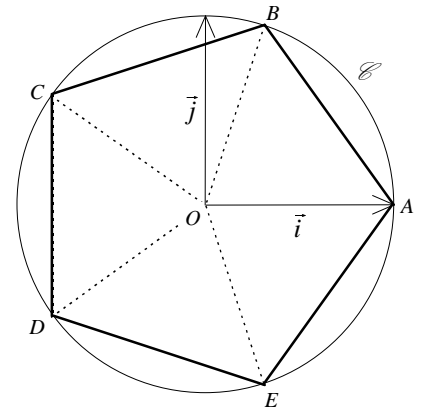
2) Étudier les variations de la fonction f , définie sur \mathbb{R} , par : $f(x) = -x^3 + 900x$.

3) Déterminer les dimensions (arrondies au dixième de cm) qui offrent à la poutre la résistance maximale à la flexion.

Exercice 4 (8 points) Détermination de la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

On a construit, dans le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , le cercle trigonométrique et, sur ce cercle, les points A, B, C, D et E tels que :

- $\vec{OA} = \vec{i}$
- $(\vec{OA}; \vec{OB}), (\vec{OB}; \vec{OC}), (\vec{OC}; \vec{OD}), (\vec{OD}; \vec{OE})$ ont tous pour mesure $\frac{2\pi}{5}$ faisant apparaître ainsi le pentagone $ABCDE$ ci-contre.



- 1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\vec{OA}; \vec{OB}), (\vec{OA}; \vec{OC}), (\vec{OA}; \vec{OD})$ et $(\vec{OA}; \vec{OE})$.
- 2) Exprimer, en fonction des mesures trouvées à la question 1), les coordonnées de vecteurs $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ et \vec{OE} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 3) On considère le vecteur \vec{V} défini par $\vec{V} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$ et on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Montrer que :
$$X = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5}$$

- 4) Dans cette question, un raisonnement correct est fait au sujet de l'isobarycentre G des points A, B, C, D et E . Votre tâche est de justifier rapidement les affirmations numérotées (*1), (*2) etc... Si vous n'y parvenez pas, vous pourrez néanmoins utiliser les résultats pour la suite de l'exercice.

G_1 , isobarycentre de B et E , appartient à (OA) (*1)

G_2 , isobarycentre de C et D , appartient à (OA)

Donc G appartient à (OA) . (*2)

De manière analogue, on peut affirmer que G appartient à (OB) .

Donc G est confondu avec O . (*3)

J'en déduis que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$. (*4)

Par conséquent $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$ (*5)

- 5) a) Exprimer $\cos \frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$ (Vous disposez, ci-dessous, d'un formulaire de trigonométrie).

b) Montrer que l'égalité (*5) est équivalente à : $4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0$.

- 6) a) Résoudre l'équation : $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

- b) Sachant, d'après la question 5)b), que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de cette équation, en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

<u>Mini formulaire de trigonométrie</u>	
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$	$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Exercice 1 (3 points)

1) La fonction f est du type : $f = u^3$ avec $u(x) = \cos x$

On a donc : $f' = 3u'u^2$

D'où : $f'(x) = 3 \times (-\sin x) \times (\cos x)^2$

$$f'(x) = -3 \sin x (\cos x)^2$$

La fonction g est du type : $g = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

On a donc : $g' = u'v + uv'$

D'où : $g'(x) = 3\sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x + 5}{2\sqrt{x}}$

2) On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} (3x + 7) = 19 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (4 - x) = 0 \text{ avec } 4 - x < 0 \text{ puisque } x < 4. \end{cases}$$

Donc, par quotient : $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x + 7}{4 - x} = -\infty$

La différence $(2x - 3) - \sqrt{x}$ est indéterminée en $+\infty$. (Type " $\infty - \infty$ ")

Écrivons : $(2x - 3) - \sqrt{x} = \sqrt{x} (2\sqrt{x} - 1) - 3$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} - 1) = +\infty \end{cases}$$

Donc, par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (2\sqrt{x} - 1) = +\infty$

En ajoutant 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x} (2\sqrt{x} - 1) + 3] = +\infty$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 - \sqrt{x}) = +\infty$

3) On a : $f'(x) = 3x^2 + 6x + 6$

On sait que le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse x est $f'(x)$.

Nous devons donc résoudre : $f'(x) = 6$

$$3x^2 + 6x = 0$$

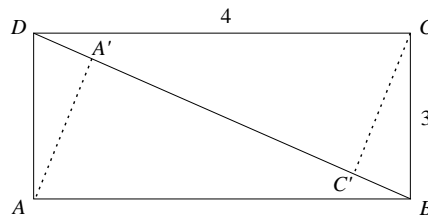
$$3x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -2$$

En outre : $f(0) = 0$ et $f(-2) = -8$

Conclusion : la tangente à C aux points $A(0 ; 0)$ et $B(-2 ; -8)$ a un coefficient directeur égal à 6.

Exercice 2 (4 points)



1) En décomposant les vecteurs suivant des directions orthogonales :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) = (\vec{AD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{DC}) = AD^2 - DC^2 = 9 - 16 = -7$$

2) Le vecteur \vec{AC} se projette donc orthogonalement en $A'C'$ sur la droite dirigée par \vec{BD} .

Par conséquent :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{A'C'} \cdot \vec{BD}$$

Et comme, d'après la question 1), $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -7$, on en déduit : $\vec{A'C'} \cdot \vec{BD} = -7$.

3) Les vecteurs $\vec{A'C'}$ et \vec{BD} sont colinéaires de sens opposés (leur produit scalaire est négatif)

On a donc :

$$-\vec{A'C'} \times \vec{BD} = -7$$

En outre, (théorème de Pythagore dans ABD) : $BD = 5$

D'où

$$A'C' = \frac{7}{5}$$

Exercice 3 (5 points)

1) D'après le théorème de Pythagore : $h^2 = 30^2 - x^2 = 900 - x^2$

On a donc :

$$xh^2 = x(900 - x^2) = -x^3 + 900x.$$

2) On a : $f'(x) = -3x^2 + 900 = -3(x^2 - 300) = -3(x - 10\sqrt{3})(x + 10\sqrt{3})$

Le signe du trinôme $-3x^2 + 900$ est négatif (car $a = -3$ l'est) sauf entre ses racines $-10\sqrt{3}$ et $10\sqrt{3}$.

On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$	$-10\sqrt{3}$		$10\sqrt{3}$	$+\infty$	
Signe de la dérivée f'		-	0	+	0	-
Variations de f						

3) D'après ce qui précède : $f(x) = xh^2$. La résistance à la flexion est donc proportionnelle à $f(x)$.

Maximiser xh^2 , c'est maximiser $f(x)$. Or, x est compris entre 0 et 30. Et, d'après la question 2), la fonction f admet un maximum sur $[0 ; 30]$ en $10\sqrt{3}$.

La largeur optimale de la poutre est donc : $x = 10\sqrt{3} \approx 17,3$ cm.

La hauteur correspondante est : $h^2 = 900 - x^2 = 900 - 300 = 600$ d'où $h = 10\sqrt{6} \approx 24,5$ cm.

Exercice 4 (8 points) Détermination de la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

1) La mesure principale est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. On a donc :

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{2\pi}{5}, (\vec{OA}; \vec{OC}) = \frac{4\pi}{5}, (\vec{OA}; \vec{OD}) = -\frac{4\pi}{5}, (\vec{OA}; \vec{OE}) = -\frac{2\pi}{5}$$

2) $\vec{OA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{OB} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, \vec{OC} \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}, \vec{OD} \begin{pmatrix} \cos(-\frac{4\pi}{5}) \\ \sin(-\frac{4\pi}{5}) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{OE} \begin{pmatrix} \cos(-\frac{2\pi}{5}) \\ \sin(-\frac{2\pi}{5}) \end{pmatrix}$$

3) $X = X_{\vec{OA}} + X_{\vec{OB}} + X_{\vec{OC}} + X_{\vec{OD}} + X_{\vec{OE}} = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos(-\frac{4\pi}{5}) + \cos(-\frac{2\pi}{5})$

Et comme $\cos(-\theta) = \cos \theta$ pour tout réel θ :

$$X = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5}$$

4) Justification de (*1) :

On a : $(\vec{OA}; \vec{OB}) = (\vec{OE}; \vec{OA}) = \frac{2\pi}{5}$.

Donc la droite (OA) est la bissectrice issue de O dans le triangle OBE .

Par ailleurs : $OB = OE$ (= rayon du cercle)

Donc le triangle OBE est isocèle en O .

On en déduit que la droite (OA) est aussi la médiatrice du segment $[BE]$.

Comme l'isobarycentre G_1 de B et E est le milieu de $[BE]$, on en déduit (*1).

Remarque : on peut aussi calculer les coordonnées de G_1 .

Par un raisonnement analogue dans le triangle OCD , on obtient : $G_2 \in (OA)$

Justification de (*2) :

D'après la règle d'associativité, l'isobarycentre G de A, B, C, D et E est aussi le barycentre de

$$(A, 1), (G_1, 2) \text{ et } (G_2, 2)$$

Or, les trois points A, G_1 et G_2 sont sur la droite (OA) . D'où (*2).

De manière analogue, on peut affirmer que G appartient à (OB) .

Justification de (*3) :

Comme $G \in (OA)$ et $G \in (OB)$, on en déduit $G = O$, c'est-à-dire (*3).

Justification de (*4) :

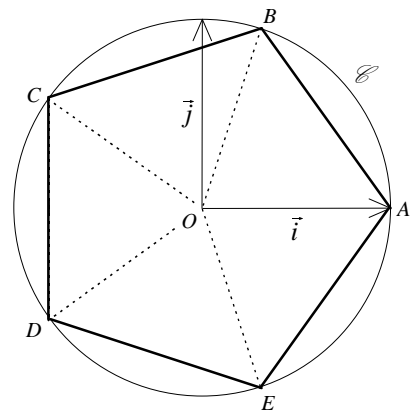
Par définition de l'isobarycentre G , on a : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} + \vec{GE} = \vec{0}$.

Et comme $G = O$: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$. (*4)

Justification de (*5) :

D'après (*4), les coordonnées de V sont nulles. En particulier : $X = 0$.

Par conséquent : $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$ (*5)



5) a) D'après la relation $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$ appliquée avec $a = \frac{2\pi}{5}$, on obtient :

$$\cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1$$

b) Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

Et d'après 5)a) :

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2(2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1) = 0$$

$$4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0.$$

6) a) Le discriminant du trinôme $4t^2 + 2t - 1$ est $\Delta = 20$.

L'équation proposée admet donc deux solutions distinctes : $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$; $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

b) Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a nécessairement : $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$.

Or, $t_1 > 0$ et $t_2 < 0$. Donc :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°9 (1 heure)

STATISTIQUES

Exercice 1 (4 points)

Cinq sportifs ont couru un 1500 m et un 5000 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
1500 m	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
5000 m	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On a déjà effectué certains calculs dont voici les résultats :

Pour le 1500 m :

- moyenne : $m = 245,006$ secondes (soit environ 4'05"01)
- écart-type $s \simeq 5,39$ secondes

Pour le 5000 m :

- moyenne : $m' = 889,818$ secondes (soit environ 14'49"82)
- écart-type $s' \simeq 31,94$ secondes

On veut comparer l'homogénéité du 1500 m et du 5000 m.

1. La comparaison des écarts-types s et s' est-elle suffisante dans cette situation ? Pourquoi ?
2. En utilisant un indicateur de dispersion plus approprié, comparer l'homogénéité de ces deux courses.

Exercice 2 (6 points)

Une entreprise utilise des moteurs soumis à des conditions difficiles. On dispose d'une étude statistique portant sur la durée de vie, en années, d'un échantillon de 120 moteurs :

Durée de vie d'un moteur (en années)	De 0 à 4	De 4 à 6	De 6 à 8	De 8 à 12	De 12 à 16
Effectif	10	20	50	20	10

1. a. Calculer la durée de vie moyenne d'un moteur pour cet échantillon.
b. Calculer l'écart-type de cet échantillon.
2. a. Représenter le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
b. Déterminer, graphiquement, la durée médiane de vie d'un moteur de cet échantillon.
c. Déterminer, graphiquement, les quartiles Q_1 et Q_3 de cet échantillon.

PROBABILITÉS

Exercice 3 (5 points)

On jette simultanément deux dés (à 6 faces, chaque face étant numérotée de 1 à 6). On suppose que ces deux dés sont bien équilibrés.

On note X le nombre de six obtenus.

1. Quelles sont les différentes valeurs possibles de X .
2. Calculer les probabilités suivantes :
 - a. $p(X = 0)$ (C'est-à-dire, la probabilité de n'obtenir aucun six)
 - b. $p(X = 2)$ (C'est-à-dire, la probabilité d'obtenir exactement deux six)
 - c. $p(X = 1)$ (C'est-à-dire, la probabilité d'obtenir exactement un six)
3. En moyenne, combien de six obtient-on ?

Exercice 4 (5 points)

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

1. Faire un arbre illustrant cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - $A = \text{"Obtenir aucune boule blanche"}$
 - $B = \text{"Obtenir au moins une boule blanche"}$
 - $C = \text{"Obtenir deux boules de même couleur"}$
 - $D = \text{"Obtenir deux boules blanches sachant que l'urne } U_1 \text{ a été choisie"}$