DEVOIR SURVEILLÉ N°1

TSTI **2001/2002** **2 heures**

La calculatrice scientifique est autorisée.
Une grande part de la notation dépendra de la rédaction et du soin.
Mis à part la question de cours, toutes les réponses doivent être justifiées.
Soyez clairs, précis, et expliquez ce que vous faites !

Questions de cours (1 points)

Une et une seule réponse est exacte. Dire laquelle (sans justifier)

Soit f une fonction représentée par une courbe C_f. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ alors :

A ❑ C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = k$

B ❑ C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = k$

C ❑ C_f n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Exercice 1 (4 points)

Étudier, (en justifiant) les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-1)(x-2001)}{2001} \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+1}{x+5}$$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad t \text{ est en } \textbf{radians}$$

1. Que vaut $f(0)$? Que vaut $f(\frac{\pi}{12})$? Que vaut $f(\frac{\pi}{3})$?
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $t_0 = 0$.

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+12}{x-1}$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Y a-t-il une asymptote horizontale ? Si oui, préciser son équation.
3. Étudier les limites de f en 1^- et en 1^+. Y a-t-il une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.
4. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 4$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
6. Dresser le tableau de variation (complet) de la fonction f.
7. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 2$.
8. Sur une feuille séparée, tracer T, C_f ainsi que ses éventuelles asymptotes.

   (Unités graphiques : au moins 2 cm par unité sur chaque axe)

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 TSTI 2 heures

La calculatrice scientifique est autorisée.
Une grande part de la notation dépendra de la rédaction et du soin.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
Soyez clairs, précis, et expliquez ce que vous faites !

Question de cours (1 point)

Préciser, sans justifications, ce que vaut :

$$\ln 1 \qquad \ln \mathbf{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

Barème :
Toutes réponses correctes : 1 point.
Une erreur (ou une réponse non donnée) : 0,5 point.
Deux erreurs ou plus (ou réponses non données) : 0 point.

Exercice 1 (2 points)

Démontrer que : $\ln(\sqrt{6}-1)+\ln(\sqrt{6}+1)-\ln(\sqrt{100})-\ln(\frac{1}{8}) = 2\ln 2$

On précisera, à chaque étape, les différentes formules de cours qui sont utilisées

Barème :
1 point si le calcul est mené correctement
1 point si les formules de cours utilisées sont précisées pertinemment

Exercice 2 (7 points)

1. Résoudre l'équation : $\ln(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}) = 0$ — 1 point
2. Résoudre l'inéquation : $\ln(-2x-4) \geqslant 1$ — 1 point
3. Résoudre l'équation : $\ln(2x+1)+\ln(x-3) = \ln(x+5)$ — 2 points
4. Résoudre l'inéquation : $\ln(2x+1)+\ln(x-3) \leqslant \ln(x+5)$ — 3 points

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x \in \,]0\,;+\infty[$.

On note (C_f) sa représentation graphique.

1. En écrivant $f(x) = \frac{1}{x}\times \ln x$, étudier la limite de f en 0^+. La courbe (C_f) admet-elle une asymptote verticale ?

   Si oui, préciser son équation. — 1 point
2. Étudier la limite de f en $+\infty$. La courbe (C_f) admet-elle une asymptote horizontale en $+\infty$?

   Si oui, préciser son équation. — 1 point
3. Démontrer que $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)$. — 2 points
4. Résoudre l'inéquation : $1-\ln x \geqslant 0$. — 1 point
5. En déduire que : $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \mathbf{e}$. — 1 point
6. Dresser le tableau de variations de f. Préciser le maximum de la fonction f. — 1 point
7. Calculer $f(\frac{1}{\mathbf{e}})$. — 1 point
8. Tracer, sur une feuille séparée, la courbe C_f. — 2 points

   Unités graphiques : 4 cm par unité sur chaque axe

Présence obligatoire jusqu'à 14h55 (sonnerie)

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 TSTI CORRIGÉ

Exercice 1 (2 points)

Démontrons que : $\ln(\sqrt{6}-1)+\ln(\sqrt{6}+1)-\ln(\sqrt{100})-\ln(\frac{1}{8}) = 2\ln 2$

D'après la relation $\ln A + \ln B = \ln(AB)$ appliquée avec $A = \sqrt{6}-1$ et $B = \sqrt{6}+1$, nous avons :

$$\ln(\sqrt{6}-1)+\ln(\sqrt{6}+1) = \ln[(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)] = \ln 5$$

Certains d'entre vous ont voulu utiliser la relation $\ln\sqrt{A} = \frac{1}{2}\ln A$ pour transformer $\ln(\sqrt{100})$ en $\frac{1}{2}\ln 100$. Mais c'est inutile, tout le monde sait que $\sqrt{100} = 10$ donc $\ln(\sqrt{100}) = \ln 10$.

D'après la relation $\ln\frac{1}{B} = -\ln B$ appliquée avec $B = 8$, on a : $\ln(\frac{1}{8}) = -\ln 8$.

On a donc :

$$\ln(\sqrt{6}-1)+\ln(\sqrt{6}+1)-\ln(\sqrt{100})-\ln(\frac{1}{8}) = \ln 5 - \ln 10 + \ln 8$$

Utilisons maintenant la relation $\ln A - \ln B = \ln\frac{A}{B}$ avec $A = 5$ et $B = 10$. Ainsi : $\ln 5 - \ln 10 = \ln\frac{1}{2}$.

Utilisons la relation $\ln A + \ln B = \ln(AB)$ avec $A = \frac{1}{2}$ et $B = 8$. Ainsi : $\ln\frac{1}{2} + \ln 8 = \ln 4 = \ln(2^2)$

Et enfin d'après la relation $\ln(A^n) = n\ln A$ avec $A = 2$ et $n = 2$, on a : $\ln(2^2) = 2\ln 2$.

D'où le résultat.

Récapitulons plus brièvement :

$$\ln(\sqrt{6}-1)+\ln(\sqrt{6}+1)-\ln(\sqrt{100})-\ln(\frac{1}{8}) = \ln 5 - \ln 10 + \ln 8 = \ln\frac{1}{2} + \ln 8 = \ln 4 = 2\ln 2$$

Exercice 2 (7 points)

Résolvons l'équation : $\ln(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}) = 0$

Contraintes : le logarithme n'est défini que pour des quantités strictement positives donc : $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} > 0$.

D'où : $$-\frac{1}{2}x > \frac{1}{3}$$

Et en multipliant les deux membres par $-2 < 0$: $x < -\frac{2}{3}$

Résolution : on suppose désormais que : $x < -\frac{2}{3}$. En remplaçant 0 par ln 1, l'équation devient :

$$\ln(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}) = \ln 1$$

On a une égalité du type $\ln A = \ln B$ avec A et B dans $]0\,;+\infty[$. On peut donc en déduire que $A = B$:

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 1$$

$$-\frac{1}{2}x = \frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Comme $-\frac{8}{3} < -\frac{2}{3}$ (compatibilité avec la contrainte), on a :

$$S = \{-\frac{8}{3}\}$$

Résolvons l'inéquation : $\ln(-2x - 4) \geqslant 1$

<u>Contraintes</u> : le logarithme n'est défini que pour des quantités strictement positives donc : $-2x - 4 > 0$.

D'où : $-2x > 4$

Et en divisant les deux membres par $-2 < 0$: $x < -2$

<u>Résolution</u> : on suppose désormais que : $x < -2$. En remplaçant 1 par ln **e**, l'inéquation devient :

$$\ln(-2x - 4) \geqslant \ln \mathbf{e}$$

On a une inégalité du type $\ln A \geqslant \ln B$ avec A et B dans $]0\,;+\infty[$. On peut donc en déduire que $A \geqslant B$:

$$-2x - 4 \geqslant \mathbf{e}$$
$$-2x \geqslant \mathbf{e} + 4$$
$$x \leqslant -\frac{\mathbf{e}+4}{2}$$

Comme $-\frac{\mathbf{e}+4}{2} < -2$, on a : $S =]-\infty\,; -\frac{\mathbf{e}+4}{2}]$

Résolvons l'équation : $\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) = \ln(x + 5)$

Déterminons les <u>contraintes</u> de cette équation. (C'est à dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation est définie). Nous savons que la fonction logarithme est définie sur $]0\,;+\infty[$. Nous devons donc avoir :

$$2x + 1 > 0 \text{ et } x - 3 > 0 \text{ et } x + 5 > 0$$

C'est-à-dire : $x > -\frac{1}{2}$ et $x > 3$ et $x > -5$

Ce qui s'écrit plus simplement : $\boldsymbol{x > 3}$

Les logarithmes intervenant dans l'équation sont donc définis lorsque $x > 3$.

<u>Résolution</u> de l'équation : on suppose désormais $x > 3$.

D'après la relation fondamentale du logarithme : $\ln A + \ln B = \ln(AB)$, pour tous réels A et B de $]0\,;+\infty[$ appliquée avec $A = 2x + 1$ et $B = x - 3$ (quantités strictement positives puisque $x > 3$), nous avons :

$$\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) = \ln[(2x + 1)(x - 3)]$$

Notre équation peut donc s'écrire :

$$\ln[(2x + 1)(x - 3)] = \ln(x + 5)$$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$, pour tous A et B de $]0\,;+\infty[$ appliquée avec $A = (2x + 1)(x - 3)$ et $B = x + 5$ (quantités strictement positives puisque $x > 3$), nous avons :

$$(2x + 1)(x - 3) = x + 5$$

En développant le membre de gauche :

$$2x^2 - 5x - 3 = x + 5$$

D'où : $2x^2 - 6x - 8 = 0$

En divisant les deux membres par 2 : $x^2 - 3x - 4 = 0$

Le trinôme du second degré $x^2 - 3x - 4$ admet deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.

Seule la racine $x_2 = 4$ est compatible avec la contrainte $x > 3$. Donc : $S = \{4\}$

Résolvons l'inéquation : $\ln(2x+1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(x+5)$

Les <u>contraintes</u> de cette inéquation sont identiques à celles de l'équation précédente : $\boldsymbol{x > 3}$

Les logarithmes intervenant dans l'inéquation sont donc définis lorsque $x > 3$.

<u>Résolution</u> de l'inéquation : on suppose désormais $x > 3$.

En reprenant les mêmes calculs que précédemment, on obtient :

$$x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$$

Le trinôme du second degré $x^2 - 3x - 4$ admet deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.

D'où la factorisation : $(x+1)(x-4) \leqslant 0$

Résolvons cette dernière inéquation (à l'aide d'un tableau de signes) :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du produit $(x+1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Justification des signes

$x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

$x-4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$

<u>Bilan</u> :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+1)(x-4) \leqslant 0$ est $[-1\ ;\ 4]$.

L'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(2x+1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(x+5)$ est donc, en tenant compte de la condition $x > 3$: $\boldsymbol{S =]3\ ;\ 4]}$

<u>Problème</u>

1. <u>Limite de f en 0</u> :

   Écrivons : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$.

   On sait que :

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

   Donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.

   D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

   Comme f admet une limite **infinie** en 0, on en déduit que C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. <u>Limite de f en $+\infty$</u> :

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (limite de référence) d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   Comme f admet une limite **finie** en $+\infty$, on en déduit que C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

3. <u>Dérivons la fonction f</u> :

   La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v(x) = x \end{cases}$

   On a donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$$

4. Résolvons l'inéquation : $1 - \ln x \geqslant 0$. Contrainte : $x > 0$ (ce qui est le cas puisque f est définie sur $]0 ; +\infty[$)

   On a : $1 \geqslant \ln x$

   En remplaçant 1 par ln **e** : $\ln \mathbf{e} \geqslant \ln x$

   D'où : $\mathbf{e} \geqslant x$

   C'est-à-dire : $x \leqslant \mathbf{e}$

   Conclusion : $S =]0 ; \mathbf{e}[$

5. Pour $x > 0$, nous avons : $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln x \geqslant 0$

   Et d'après la question 4 : $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \mathbf{e}$

6. La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $]0 ; \mathbf{e}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\mathbf{e} ; +\infty[$.

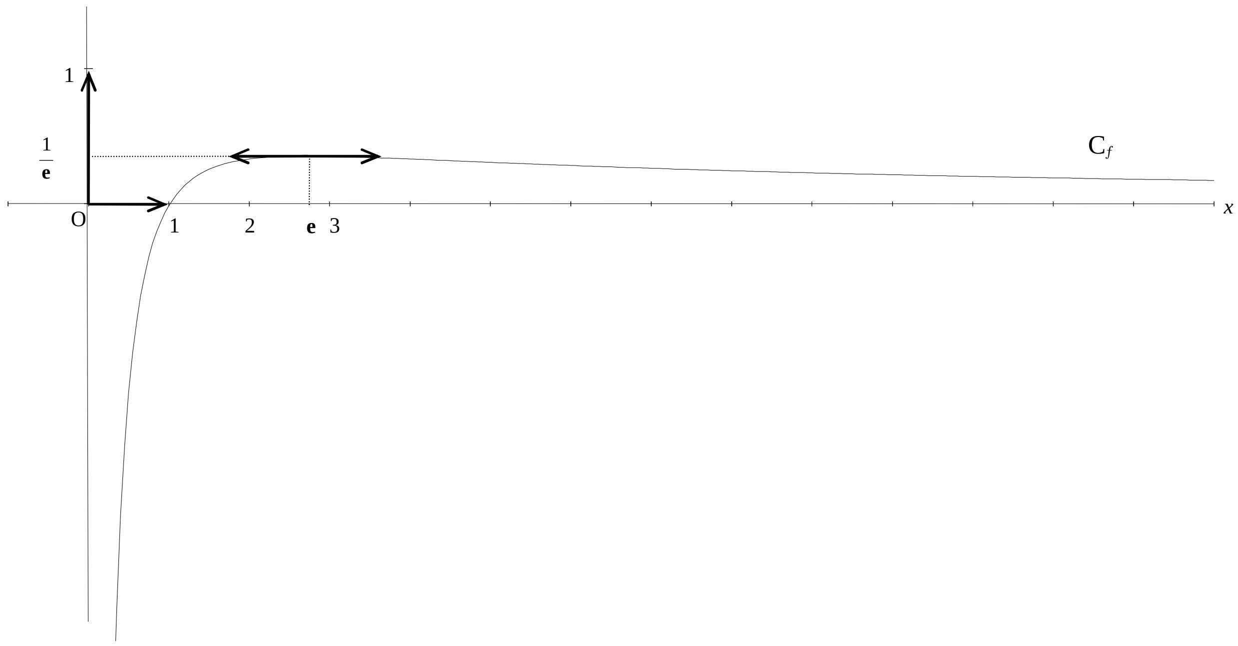
   Tableau de variation de la fonction f :

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{\mathbf{e}}$	↘	$\mathbf{e}$

$$f(\mathbf{e}) = \frac{\ln \mathbf{e}}{\mathbf{e}} = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

7. $f\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right) = \dfrac{\ln \frac{1}{\mathbf{e}}}{\frac{1}{\mathbf{e}}} = -\mathbf{e}.$

8. Représentation graphique :



DEVOIR SURVEILLÉ N°3 TSTI 2 heures

Votre présence en salle de devoir est obligatoire de 13h00 jusqu'à 14h55 (sonnerie)

Les surveillants ne répondront à aucune question. Soyez autonomes !

Questions de cours (1 point)

Soit $Z = a + b\mathbf{i}$ un nombre complexe. Recopier en complétant les phrases suivantes :

La partie réelle de Z est : $\mathrm{Re}(Z) =$ ....

La partie imaginaire de Z est : $\mathrm{Im}(Z) =$ ....

Le nombre complexe conjugué $\overline{Z}$ de Z est : $\overline{Z} =$ ....

Le module $|Z|$ de Z est le réel défini par : $|Z| =$ ....

Barème : –0,5 point par réponse fausse ou absence de réponse.

Exercice 1 (2 points)

Soit $Z = a + b\mathbf{i}$ un nombre complexe. Démontrer que l'on a :

$$Z + \overline{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z) \qquad \text{et} \qquad Z - \overline{Z} = 2\,\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(Z)$$

(Un conseil : ne partez pas de l'égalité qu'il faut démontrer !)

Exercice 2 (2 points)

On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 4 + 3\mathbf{i}$ et $Z_2 = 5 - 2\mathbf{i}$

Écrire sous la forme $a + b\mathbf{i}$ les nombres complexes suivants :

$$Z_1 Z_2 \qquad\qquad \frac{Z_1}{Z_2}$$

(Évidemment, vous devez détailler les calculs...)

Exercice 3 (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C dont les affixes sont : $Z_A = \sqrt{3} + \mathbf{i}$, $Z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathbf{i}$ et $Z_C = 1 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$.

Démontrer que les points A, B et C sont, tous trois, sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon R.

(Indication : calculez les distances OA, OB et OC...)

Exercice 4 (3 points)

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 = -16$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(Z - 3\mathbf{i})^2 = -16$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 + Z + 1 = 0$.

Tournez la page, ce n'est pas fini !

Problème (9 points)

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x \ln x - x + 1$, pour $x \in \,]0, +\infty[$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathbf{e})$. (On demande la valeur exacte !)
2. Étudier la limite de g lorsque x tend vers 0. (Vous pouvez utiliser certaines formules du cours...)
3. Étudier la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$. (En cas de forme indéterminée, on peut tenter une petite factorisation, non ?)
4. Calculer la dérivée g' de g. En déduire le tableau de variations de g. (On précisera la valeur des éventuels extremums)
5. Justifier que g est positive sur $]0, +\infty[$. (Regardez bien le tableau de variations...)
6. Résoudre l'équation $g(x) = x + 1$. (N'oubliez pas de préciser les contraintes et de confronter vos solutions aux contraintes !)
7. Tracer soigneusement la courbe C_g de la fonction g. (On a bien dit : soigneusement)

Vous avez fini et il vous reste du temps ?

1. Relisez-vous.

2. Avez-vous répondu à toutes les questions ?

3. Avez-vous bien numéroté les questions ?

4. Les justifications sont-elles toutes données ?

5. Avez-vous bien mis en évidence (soulignement, encadrement, couleurs...) les différents résultats ?

6. Vos résultats sont-ils cohérents ? N'y a-t-il pas de contradictions entre vos différentes affirmations ?

DEVOIR SURVEILLÉ N°4 TSTI 2 heures

Votre présence en salle de devoir est obligatoire de 13h00 jusqu'à 14h55 (sonnerie)

Les surveillants ne répondront à aucune question. Soyez autonomes !

Exercice 1 (3 points)

Recopier et compléter le tableau suivant : (Détailler les calculs)

	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Z_A			$4\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$
Z_B		$4(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{6})$	
Z_C	$2\sqrt{3} - 2\mathbf{i}$		

Exercice 2 (4 points)

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Déterminer les écritures sous formes exponentielle et trigonométrique de $z_1 \times z_2$.
2. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique. En déduire la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.
3. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus suivants :

$$\cos\frac{7\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{7\pi}{12}$$

Exercice 3 (3 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et C dont les affixes respectives sont $Z_A = -\mathbf{i}$; $Z_B = 4 + \mathbf{i}$; $Z_C = 2 - 5\mathbf{i}$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Calculer les distances AB, AC et BC.
3. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 4 (4 points)

1. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant : $Z = \left(\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1+\mathbf{i}}\right)^6$
2. Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$. Écrire ces solutions sous forme exponentielle.

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x \ln x - 2x$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau de variation de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coordonnées du (ou des) point(s) où C_f coupe l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe C_f représentant la fonction f. (Unités graphiques : 1 cm sur chaque axe)

Exercice 6 (2 points)

1. Exprimer en fonction de ln 3 et ln 7 le nombre suivant : $A = 11 \ln 27 - 3 \ln 63$.
2. Exprimer en fonction de ln 2 le nombre suivant : $B = \ln \frac{1}{8} + \ln 80 - 2 \ln \sqrt{5}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°5 TSTI 2 heures

Exercice 1 (6 points)

Une urne contient :

- 1 jeton vert rapportant 10 €
- 3 jetons oranges rapportants chacun 5 €
- n jetons rouges ne rapportants rien.

Dans cet exercice, vous pouvez vous aider en faisant un arbre

Pour une mise de m €, un joueur peut tirer un jeton, au hasard, dans l'urne.

On note X le gain du joueur.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est $m = 1$ €.
   Combien de jetons rouges faut-il mettre dans l'urne pour avoir un jeu équitable ?
2. Dans cette question, la mise m est inconnue et on suppose que $n = 16$. (Il y a donc 16 jetons rouges)
   Quelle doit être la mise m pour avoir un jeu équitable ?

Exercice 2 (6 points)

On lance simultanément deux dés (non truqués et numérotés de 1 à 6). On note X la somme des chiffres obtenus et Y le produit des chiffres obtenus. On s'intéresse à la variable aléatoire Z définie par $Z = Y - 2X$.

Par exemple, si les dés affichent 4 et 6, on a : $X = 10$, $Y = 24$ et $Z = 4$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

Dans cet exercice, vous pouvez vous aider en faisant un tableau à deux entrées

1. A = "Z est un nombre positif (ou nul)"
2. B = "Z est un nombre impair"
3. C = "Z est un nombre positif (ou nul) ou un nombre impair"

Exercice 3 (4 points)

Lorsqu'un joueur de tennis effectue une mise en jeu, il a droit à deux tentatives : un premier service, suivi, s'il n'est pas réussi d'un second service.

Les statistiques du joueur Jean-Marc DÉSAISSE sont les suivantes :

Dans cet exercice, vous pouvez vous aider en faisant un arbre

- la probabilité que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$
- s'il a échoué, la probabilité que le deuxième service réussisse est égale à $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a "double faute", sinon, la mise en jeu est réussie.

Calculer :

1. la probabilité que Jean-Marc fasse une double faute.
2. La probabilité que Jean-Marc réussisse sa mise en jeu.

Exercice 4 (4 points)

Dans cet exercice, vous pouvez vous aider en faisant un arbre

Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.

1. On achète 2 billets. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un billet gagnant ?
2. On achète maintenant n billets. Calculer en fonction de n la probabilité qu'il y ait au moins un billet gagnant.
3. Combien de billets faut-il acheter pour être sûr à 50% d'avoir au moins un billet gagnant ?

DEVOIR SURVEILLÉ N°6 TSTI 2 heures

Votre présence en salle de devoir est obligatoire de 13h00 jusqu'à 14h55 (sonnerie)

Vous devez faire les trois exercices et le problème.

Le sujet est conçu pour une durée de 1h55.

Le formulaire officiel du BAC est joint au sujet. Vous pourrez le garder en fin d'épreuve.

Les surveillants ne répondront à aucune question. Soyez autonomes ! Consultez les aides dans les cadres.

<u>Exercice 1</u> (4 points)

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire, au hasard, une boule de l'urne.

> C'est un exercice de probabilités. Lisez attentivement l'énoncé pour enregistrer chaque donnée. L'idéal est de dessiner l'urne avec son contenu.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   J = "tirer une boule jaune"

   B = "tirer une boule bleue"

   R = "tirer une boule rouge"

   V = "tirer une boule verte"

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :

   - rouge, on gagne 10 €
   - verte, on gagne 2 €
   - jaune ou bleue, on gagne 3 €

   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

   > Les formules de calcul d'espérance, de variance et d'écart-type sont dans le formulaire.

   a) Déduire de la question 1) : $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 10)$.

   b) Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance puis son écart–type.
   (On arrondira l'écart-type à 10^{-2})

3. Maintenant, on gagne toujours 10 € si la boule tirée est rouge, 2 € si elle est verte mais on gagne 3 € si elle est jaune et m € si elle est bleue ; m désignant un réel positif.

   Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

<u>Exercice 2</u> (4 points)

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $x^2 - \sqrt{3}\,x + 1 = 0$

   (On donnera les solutions sous forme algébrique, trigonométrique puis exponentielle)

2) Démontrer que : $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})$.

   (Méthode libre)

> Quelles sont les différentes façons de démontrer une égalité ?

Exercice 3 (2 points)

Voici l'énoncé d'un exercice avec la solution d'un élève :

Énoncé :

Résoudre l'inéquation : $(\ln x)^2 - \ln x - 42 \geqslant 0$.

SOLUTION DE L'ÉLÈVE :

On pose $X = \ln x$ afin de se ramener à une inéquation du second degré : (Ligne 1)

$$X^2 - X - 42 \geqslant 0 \quad \text{(Ligne 2)}$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 169$. On obtient deux racines distinctes : (Ligne 3)

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 7 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -6 \quad \text{(Ligne 4)}$$

D'où la factorisation : $X^2 - X - 42 = (X-7)(X+6)$ (Ligne 5)

Notre inéquation s'écrit : $(\ln x - 7)(\ln x + 6) \geqslant 0$ (Ligne 6)

On conclut avec un tableau de signes : (Ligne 7)

x	0		$\mathbf{e}^{-6}$		$\mathbf{e}^{7}$		$+\infty$	Calculs et justification des signes
signe de $\ln x - 7$		$-$		$-$	0	$+$		$\ln x - 7 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 7 \iff x \geqslant \mathbf{e}^{7}$
signe de $\ln x + 6$		$-$	0	$+$		$+$		$\ln x + 6 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -6 \iff x \geqslant \mathbf{e}^{-6}$
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$		

(Tableau)

Conclusion : $S =]0\,;\, \mathbf{e}^{-6}] \cup [\mathbf{e}^{7}\,;\, +\infty[$ (Ligne 8)

La réponse finale de l'élève est juste mais les raisonnements intermédiaires comportent des erreurs ou des oublis.

En trouver au moins deux.

Problème (10 points)

Partie *A* *Résolution d'une inéquation comportant des exponentielles*

Résoudre l'inéquation : $2\,\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10 \geqslant 0$ [On pourra poser $X = \mathbf{e}^{x}$]

Partie *B* *Étude d'une fonction comportant des exponentielles*

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 de la partie *B* sont **indépendantes**. En cas de panne, ne baissez pas les bras et essayez de continuer. Rappelez-vous que vous pouvez toujours tracer la courbe.

1) Calculer $f(0)$.
2) Étude de f en $+\infty$.
   a) Démontrer que, pour tout réel x, on a :
   $$f(x) = \mathbf{e}^{x}\,(\mathbf{e}^{x} - 12) + 10x + 11$$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3) Étude de f en $-\infty$.
   a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Soit Δ la droite d'équation : $y = 10x + 11$.
      i) Démontrer que Δ est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.
      ii) Étudier, sur $]-\infty\,;\,0]$, la position de Δ par rapport à C_f.
4) Étude des variations de f.
   a) Calculer la dérivée f' de f.
   b) À l'aide de la partie *A*, dresser le tableau de variations de f.
5) Tracer, très soigneusement, Δ et C_f.
   (Unités graphiques : 5 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.)

Faites votre graphique sur une feuille séparée en la mettant en position "paysage" (C'est-à-dire dans cette orientation : ▭)

Vous avez fini et il vous reste du temps ?

1. Relisez-vous.
2. Avez-vous répondu à toutes les questions ?
3. Avez-vous bien numéroté les questions ?
4. Les justifications sont-elles toutes données ?
5. Avez-vous bien mis en évidence (soulignement, encadrement, couleurs...) les différents résultats ?
6. Vos résultats sont-ils cohérents ? N'y a-t-il pas de contradictions entre vos différentes affirmations ?

Si après avoir effectué toutes ces opérations, il vous reste encore du temps, voici une petite énigme pour vous occuper :

Énigme : où est l'erreur dans le calcul suivant ?

$$\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 1$$

En élevant à la puissance x : $\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi}\right)^{x} = 1^{x} = 1$

D'où : $\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi x} = 1$

En particulier pour $x = \dfrac{1}{4}$: $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = 1$

D'où : $\mathbf{i} = 1$

DEVOIR SURVEILLÉ N°6 TSTI : CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

1. Comme chaque boule a autant de chance d'être tirée, on est dans une situation d'**équiprobabilité**. La probabilité p d'un événement peut donc se calculer à l'aide de la formule :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On a ainsi :

$$P(J) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad P(R) = \frac{1}{10} \qquad P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :

- rouge, on gagne 10 €
- verte, on gagne 2 €
- jaune ou bleue, on gagne 3 €

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

a) $P(X = 2) = P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Comme les événements J et B sont incompatibles, on a : $P(J \cup B) = P(J) + P(B)$.

D'où : $P(X = 3) = P(J \cup B) = P(J) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$P(X = 10) = P(R) = \frac{1}{10}$

b) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs de X	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{5}{10}$	$p_3 = \frac{1}{10}$

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = \frac{4}{10} \times 2 + \frac{5}{10} \times 3 + \frac{1}{10} \times 10 = \frac{33}{10} = 3,3$$

La variance de X est donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{4}{10} \times 2^2 + \frac{5}{10} \times 3^2 + \frac{1}{10} \times 10^2 - 3,3^2 = 16,1 - 10,89 = 5,21$$

Et enfin, l'écart-type de X est donné par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{5,21} \simeq 2,28$$

3. Notons Y la nouvelle variable aléatoire correspondant au gain moyen dans cette situation.

La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de Y	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = m$	$y_4 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{3}{10}$	$p_3 = \frac{2}{10}$	$p_4 = \frac{1}{10}$

On souhaite avoir : $E(Y) = 4{,}5$

C'est à dire : $\frac{4}{10} \times 2 + \frac{3}{10} \times 3 + \frac{2}{10} \times m + \frac{1}{10} \times 10 = 4{,}5$

$$27 + 2m = 45$$

$$m = 9$$

Il faut donc que la boule bleue rapporte 9 € pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

Exercice 2 (4 points)

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $x^2 - \sqrt{3}\,x + 1 = 0$

Nous avons affaire à une équation du second degré (type $a\,x^2 + bx + c = 0$) avec $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ et $c = 1$.

Son discriminant Δ est donné par : $\Delta = b^2 - 4ac = 3 - 4 = -1$.

Comme le discriminant est strictement négatif, l'équation proposée admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

On obtient : $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}$

On a immédiatement, par bonne connaissance du cercle trigonométrique :

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \cos(-\frac{\pi}{6}) + \mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$z_1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} \quad \text{et } z_1 = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$$

2) Développons : $(x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}) = x^2 - (\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})x + \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$

Or, on sait que : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = 2\cos\theta$ (formule d'EULER) et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = 1$

D'où : $(x - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})(x - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}) = x^2 - 2x\cos\theta + 1$

Exercice 3 (2 points)

Ligne 1 : oubli de la **contrainte** : $\boldsymbol{x} > 0$

Ligne 3 : les coefficients a, b et c doivent être précisés : $a = 1$; $b = -1$ et $c = -42$.

Ligne 3 : le calcul de Δ doit être détaillé : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-42) = 1 + 168 = 169$.

Ligne 3 : Le signe de Δ doit être précisé : comme $\boldsymbol{\Delta > 0}$, on obtient deux racines **réelles** distinctes.

Ligne 4 : les valeurs de X_1 et X_2 ont été permutées. De plus, les détails des calculs doivent être donnés :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-13}{2} = -6 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+13}{2} = 7$$

Ligne 5 : la formule générale de factorisation doit être écrite : lorsque $\Delta > 0$: $a\,X^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$

Tableau : il manque la **double barre** pour $x = 0$.

Tableau : les calculs ne sont pas assez détaillés : $\ln x \geqslant 7 \iff \ln x \geqslant \ln \mathbf{e}^7 \iff x \geqslant \mathbf{e}^7$

Problème (10 points)

Partie *A* *Résolution d'une inéquation comportant des exponentielles*

Posons $X = \mathbf{e}^x$. Ainsi, $X^2 = \left(\mathbf{e}^x\right)^2 = \mathbf{e}^{2x}$ et l'inéquation proposée est alors équivalente à :

$$2X^2 - 12X + 10 \geqslant 0$$

C'est une inéquation du second degré ($aX^2 + bX + c \geqslant 0$) avec $a = 2$, $b = -12$ et $c = 10$.

Le discriminant Δ est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 64$

Le discriminant Δ étant strictement positif, le trinôme $2X^2 - 12X + 10$ admet deux racines distinctes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-8}{4} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+8}{4} = 5$$

De la relation : $aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$, on déduit la forme factorisée de notre inéquation :

$$2(X-1)(X-5) \geqslant 0$$

Et comme $X = \mathbf{e}^x$: $2(\mathbf{e}^x - 1)(\mathbf{e}^x - 5) \geqslant 0$

On détermine l'ensemble S des solutions de l'inéquation à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$	Calculs et justification des signes
signe de $\mathbf{e}^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$\mathbf{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
signe de $\mathbf{e}^x - 5$		$-$		$-$	0	$+$		$\mathbf{e}^x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x \geqslant 5 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 5$
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$		

Bilan : $S =]-\infty\,;0] \cup [\ln 5\,;+\infty[$

Partie *B* *Étude d'une fonction comportant des exponentielles*

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^x + 10x + 11$$

1) $f(0) = \mathbf{e}^0 - 12\,\mathbf{e}^0 + 10 \times 0 + 11 = 1 - 12 + 11 = 0$.

2) Étude de f en $+\infty$.

   a) Comme $\mathbf{e}^{2x} = \mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^x$, on obtient, en factorisant les deux premiers termes de $f(x)$:

$$f(x) = \mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^x - 12\,\mathbf{e}^x + 10x + 11 = \mathbf{e}^x(\mathbf{e}^x - 12) + 10x + 11$$

   b) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathbf{e}^x - 12) = +\infty \end{cases}$$

   Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x(\mathbf{e}^x - 12) = +\infty$.

   En outre : $\lim\limits_{x\to+\infty} (10x + 11) = +\infty$.

   Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} [\mathbf{e}^x(\mathbf{e}^x - 12) + 10x + 11] = +\infty$.

   <u>Conclusion</u> : la limite de la fonction *f* en $+\infty$ est $+\infty$.

   <u>Remarque</u> : cette limite n'étant **pas finie**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

3) Étude de f en $-\infty$.

   a) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{2x} = 0 \ \text{(car } \mathbf{e}^{2x} = \mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^x \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -12\,\mathbf{e}^x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (10x + 11) = -\infty$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11 = -\infty$

<u>Conclusion</u> : la limite de la fonction f en $-\infty$ est $-\infty$.

<u>Remarques</u> :

- On peut également obtenir ce résultat en travaillant avec l'écriture : $f(x) = \mathbf{e}^{x}\,(\,\mathbf{e}^{x} - 12) + 10x + 11$.
- La limite de f en $-\infty$ n'étant **pas finie**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

b) Soit Δ la droite d'équation : $y = 10x + 11$.

> <u>Note</u> : $f(x) - y$ représente "l'écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ aux points d'abscisse x

i) Étudions **la limite en $-\infty$** de $f(x) - y$:

Déjà, on a : $f(x) - y = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10x + 11 - (10x + 11) = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x}$

Or, on a vu (question [B2b]) que : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\,\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x}\,) = 0$

On a donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (10x + 11)] = 0.$

Lorsque x tend vers $-\infty$, les nombres $f(x)$ s'approchent donc des nombres $10x + 11$.

Autrement dit :

Lorsque x tend vers $-\infty$, les points de C_f s'approchent donc des points de Δ.

<u>Conclusion</u> : la droite Δ est asymptote (oblique) à la courbe C_f en $-\infty$.

ii) Étudions, pour $x \leqslant 0$, **le signe** de $f(x) - y$:

On a : $f(x) - y = \mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} = \mathbf{e}^{x}\,(\,\mathbf{e}^{x} - 12)$

Or, on sait que, d'une part : $\mathbf{e}^{x} > 0$ pour tout réel x

Et, d'autre part : $\mathbf{e}^{x} - 12 < 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$.

(En effet : $x \leqslant 0 \Rightarrow \mathbf{e}^{x} \leqslant \mathbf{e}^{0} \Rightarrow \mathbf{e}^{x} \leqslant 1 \Rightarrow \mathbf{e}^{x} < 12 \Rightarrow \mathbf{e}^{x} - 12 < 0$)

On peut donc affirmer : $\mathbf{e}^{x}\,(\,\mathbf{e}^{x} - 12) < 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$

C'est-à-dire : $f(x) - y < 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$

$f(x) < y$ pour tout réel $x \leqslant 0$

C_f est en dessous de Δ sur $]-\infty\,;\,0]$

4) Étude des variations de f.

a) Nous savons que : $(\,\mathbf{e}^{u}\,)' = u'\,\mathbf{e}^{u}$ pour toute fonction u dérivable. En particulier avec $u(x) = 2x$, nous obtenons : $(\,\mathbf{e}^{2x}\,)' = 2\,\mathbf{e}^{2x}$

On en déduit : $f'(x) = 2\,\mathbf{e}^{2x} - 12\,\mathbf{e}^{x} + 10$

b) D'après la partie A, on a : $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\,;\,0] \cup [\ln 5\,;\,+\infty[$

On en déduit le tableau de variation de f :

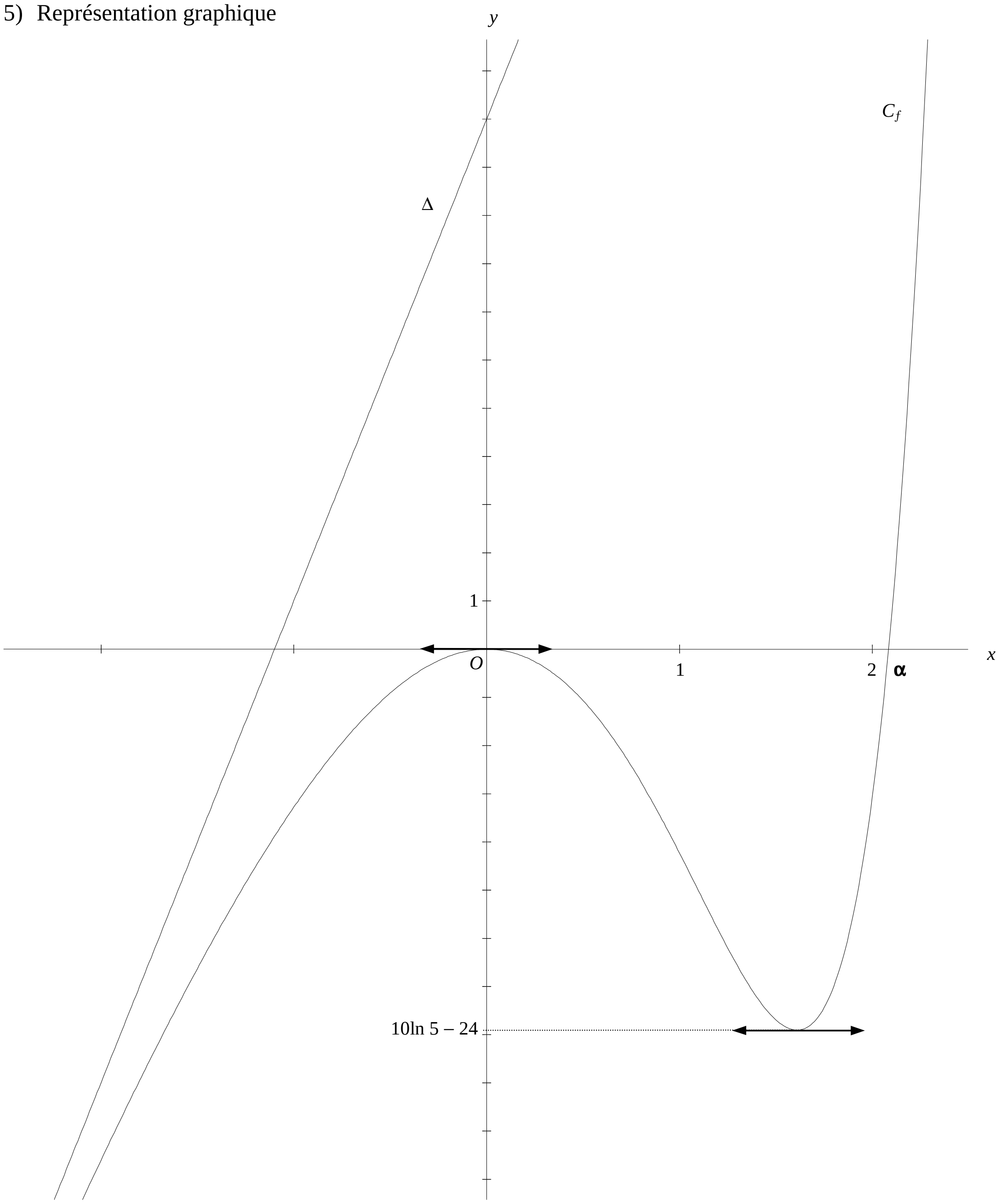
x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
Signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$10\ln 5 - 24$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un maximum en 0 : $f(0) = 0$ d'après la question [B1]

La fonction f admet un minimum en $\ln 5$:

$f(\ln 5) = \mathbf{e}^{2\ln 5} - 12\,\mathbf{e}^{\ln 5} + 10\ln 5 + 11 = \mathbf{e}^{\ln 25} - 12 \times 5 + 10\ln 5 + 11 = 25 - 60 + 10\ln 5 + 11 = 10\ln 5 - 24$

5) Représentation graphique



<u>Énigme</u> : où est l'erreur dans le calcul suivant ?

$$\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 1$$

En élevant à la puissance x : $\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi}\right)^x = 1^x = 1$

D'où : $\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi x} = 1$

En particulier pour $x = \frac{1}{4}$: $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = 1$

D'où : $\mathbf{i} = 1$

SOLUTION DE L'ÉNIGME :
la relation $\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{n\mathbf{i}\theta}$ n'est valable que pour n entier. On ne peut donc pas l'appliquer avec $\frac{1}{4}$.

TSTI : DS pour les élèves absents aux DS

Exercice 1 (4 points)

1. Calculer l'intégrale suivante en fonction de α : $I = \int_{-1}^{1} x^2 - \alpha \, dx$.
2. Trouver un réel α tel que $\int_{-1}^{1} x^2 - \alpha \, dx = 0$.

Exercice 2 (5 points)

On considère le jeu suivant : une urne contient six boules blanches et une boule rouge. Le joueur tire successivement et sans remise une boule jusqu'à tirer la boule rouge. On note k le rang du tirage de la boule rouge. On suppose que, à chaque tirage, chaque boule a autant de chance d'être tirée. Le joueur gagne k euros si k est pair et perd k euros si k est impair. Soit X la variable aléatoire qui correspond au gain (en euros) du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer son espérance mathématique.
3. Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?
4. Sachant que la première boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?

Problème (11 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{1 + \mathbf{e}^x} .$$

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités graphiques : 2 cm par axes)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f et préciser son signe.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en 0.
5. Tracer la courbe C et ses éventuelles asymptotes ainsi que la droite T.
6. Calculer l'aire du domaine suivant en cm^2 :

$$D = \{M(x\,;\,y) \text{ tels que } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$