DEVOIR-MAISON N°1

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = \frac{1,0000002}{1,0000004} \quad \text{et} \quad B = \frac{0,9999996}{0,9999998}$$

Piste :

1. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1+2x}{1+4x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}$$

   a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?

   b) Que vaut $f(10^{-7})$? Que vaut $g(10^{-7})$?

2. Pour comparer les nombres A et B, on va comparer les fonctions f et g en étudiant la différence $f(x) - g(x)$.

   a) Démontrer que : $f(x) - g(x) = \dfrac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$.

   b) Résoudre l'inéquation : $f(x) - g(x) > 0$.

   c) En déduire le signe de $f(10^{-7}) - g(10^{-7})$.

   d) Conclure.

DEVOIR-MAISON N°1 : CORRIGÉ

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = \frac{1{,}000\,000\,2}{1{,}000\,000\,4} \quad \text{et} \quad B = \frac{0{,}999\,999\,6}{0{,}999\,999\,8}$$

1. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1+2x}{1+4x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}$$

a) Les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g sont : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

b) On a : $f(10^{-7}) = \dfrac{1+2\times10^{-7}}{1+4\times10^{-7}} = \dfrac{1{,}000\,000\,2}{1{,}000\,000\,4} = A$ et $g(10^{-7}) = \dfrac{1-4\times10^{-7}}{1-2\times10^{-7}} = \dfrac{0{,}999\,999\,6}{0{,}999\,999\,8} = B$.

2. Pour comparer les nombres A et B, on va comparer les fonctions f et g en étudiant la différence $f(x) - g(x)$.

a) $f(x) - g(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x} - \dfrac{1-4x}{1-2x}$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$f(x) - g(x) = \frac{(1+2x)(1-2x)-(1-4x)(1+4x)}{(1+4x)(1-2x)} = \frac{(1-4x^2)-(1-16x^2)}{(1+4x)(1-2x)} = \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$$

b) Résolvons l'inéquation $f(x) - g(x) > 0$. Pour cela, on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$12x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$1+4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On a donc : $S =]-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}[\setminus \{0\}$.

c) Comme $10^{-7} \in S$, on a : $f(10^{-7}) - g(10^{-7}) > 0$.

d) Comme $f(10^{-7}) - g(10^{-7}) = A - B$ (d'après la question 1b) et que $f(10^{-7}) - g(10^{-7}) > 0$ (d'après la question 2c), on en déduit finalement que $A - B > 0$, c'est-à-dire : $A > B$.