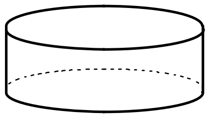
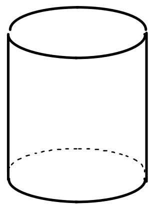
DEVOIR-MAISON N°18

DIMENSIONS D'UNE BOÎTE DE CONSERVE

Un industriel désire commercialiser des boîtes (cylindriques) de flageolets d'une contenance V égale à 400 cm^3. Il se demande quel est le **format** de la boîte qui nécessitera le moins de matière première, ceci afin d'avoir un coût de production le plus faible possible.



Plutôt larges et basses
ou
Plutôt fines et hautes ?



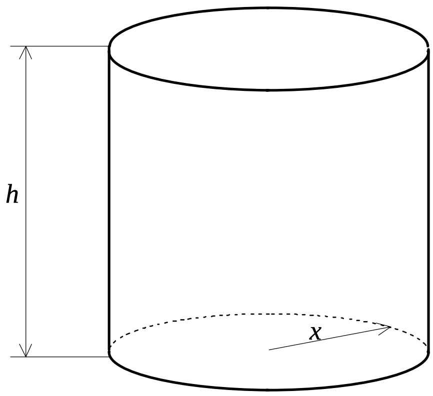
En pratique, les boîtes de conserve sont fabriquées à partir de plaques de fer dans lesquelles sont découpés des "patrons" qui sont ensuite recourbés puis soudés

0. Dessiner le patron d'une boîte de conserve de forme cylindrique.

A) Calcul de la surface de fer nécessaire pour réaliser la boîte

1. Calculer l'aire du fond, du couvercle et de la partie latérale de la boîte en fonction de du rayon x et de la hauteur h de la boîte. (On suppose $x > 0$ et $h > 0$)
2. En déduire que l'aire totale $A(x)$ de la boîte est égale à : $A(x) = 2\pi xh + 2\pi x^2$.
3. Calculer en fonction de x et h le volume V de la boîte.
4. Sachant que V = 400 cm^3, déduire des questions précédentes que l'aire $A(x)$ peut s'écrire :

$$A(x) = \frac{800}{x} + 2\pi x^2 .$$



x et h sont mesurés en cm

B) Étude de la fonction A

1. Étudier les limites de la fonction A en 0 (à droite) et en $+\infty$.
2. Calculer $A'(x)$. Démontrer que : $A'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction A. Préciser la valeur x_m pour laquelle la fonction A admet un minimum.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction A sur l'intervalle]0 ; 10].
5. A l'aide de la formule de la question A) 3. déterminer la hauteur h_o optimale de la boîte.
6. Démontrer que $h_o = 2x_m$. Conclure.

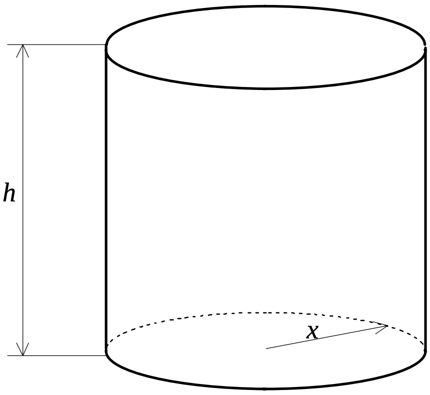
DEVOIR-MAISON N°18 : CORRIGÉ

A) Calcul de la surface de fer nécessaire pour réaliser la boîte

1. Aire du fond : πx^2.

   Aire du couvercle : πx^2.

   La partie latérale est un rectangle (recourbé) de côtés h et $2\pi x$ donc son aire est : $2\pi xh$.



x et h sont mesurés en cm

2. Aire totale $A(x) = 2\pi xh + 2\pi x^2$.
3. Volume V : V = Aire base × hauteur = $\pi x^2 h$
4. Comme $V = 400$ cm^3, on a : $h = \dfrac{400}{\pi x^2}$.

   D'où : $A(x) = \dfrac{800}{x} + 2\pi x^2 = \dfrac{800 + 2\pi x^3}{x}$

B) Étude de la fonction *A*

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{800}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} 2\pi x^2 = 0$. Donc, par somme : $\lim\limits_{x \to 0^+} A(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{800}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\pi x^2 = +\infty$. Donc, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$.

2. $A'(x) = -\dfrac{800}{x^2} + 4\pi x$. En réduisant au même dénominateur : $A'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2}$.

$$A'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4\pi x^3 - 800 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \geqslant \frac{200}{\pi} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}.$$

   Remarque : l'équivalence $a^3 \geqslant b^3 \Leftrightarrow a \geqslant b$ est une conséquence de la stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$. Attention, on n'a pas de telle équivalence avec des carrés (au lieu des cubes) !

3. Tableau de variation de la fonction A :

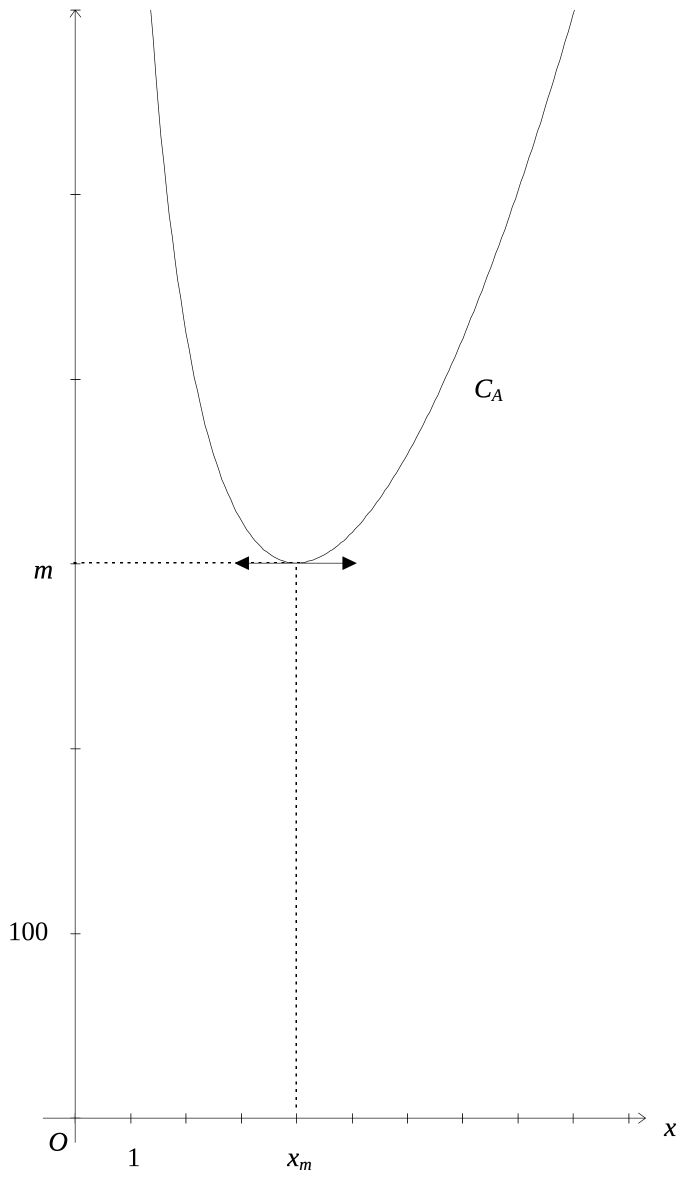
x	0		$\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$		$+\infty$
signe de la dérivée A'	||	$-$	0	$+$	
variations de A	|| $+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

D'après la question 2.

   La valeur x_m pour laquelle la fonction A admet un minimum est $x_m = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$ cm (à 10^{-2} près)

   Ce minimum est $m = A\left(\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}\right) = \left(800 + 2\pi\dfrac{200}{\pi}\right)\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{200}} = 1200\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{200}} \simeq 300{,}53$ cm^2 (à 10^{-2} près)

4. Courbe représentative de la fonction A sur l'intervalle $]0 ; 10]$.



5. On sait que : $h_o = \dfrac{400}{\pi x_m^2} \simeq 7{,}99$ à 10^{-2} près.

6. Élevons l'égalité $h_o = \dfrac{400}{\pi x_m^2}$ au cube ; ainsi :

$$h_o^3 = \frac{400^3}{\pi^3} \times \left(\frac{1}{x_m^2}\right)^3 = \frac{400^3}{\pi^3} \times \frac{\pi^2}{200^2} = \frac{2^3 \times 200^3}{\pi^3} \times \frac{\pi^2}{200^2} = 8 \times \frac{200}{\pi}$$

D'où $h_o = 2 \times \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} = 2x_m$.

<u>Conclusion</u> : la boîte nécessitant le moins de matière première est celle qui a une hauteur égale au double du rayon. (C'est-à-dire hauteur = diamètre)