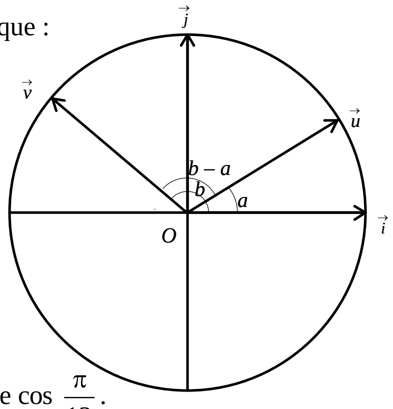
DEVOIR-MAISON N°9

Problème *Démonstration d'une formule de trigonométrie :* $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que :

$$(\vec{i}, \vec{u}) = a \text{ et } (\vec{i}, \vec{v}) = b$$



1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}) = b - a$. (On pourra utiliser la relation de Chasles)

   En déduire que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a - b)$.

2. Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (en fonction de a et b).

   En déduire que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

3. En déduire que pour tous réels a et b, on a : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

   Application immédiate : en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

4. D'autres applications : *une formule qui en donne d'autre* !

   On note (✳) la relation : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

   a) Si $b = a$ dans la relation (✳), quelle célèbre relation retrouve-t-on ?

   b) Si $b = -a$, démontrer que la relation (✳) devient : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$. En déduire les relations :

   $$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

   À l'aide des deux relations ci-dessus, calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

DEVOIR-MAISON N°9 : CORRIGÉ

1. D'après la relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}) = -(\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{i}, \vec{v}) = b - a\ (2\pi)$

   Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires, on a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(b-a)$.

   Or, pour tout réel θ, on a : $\cos\theta = \cos(-\theta)$. D'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a-b)$ $(R1)$

2. Par définition du cosinus et du sinus, on a : $\vec{u}(\cos a ; \sin a)$ et $\vec{v}(\cos b ; \sin b)$.

   D'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $(R2)$

3. Des relations $(R1)$ et $(R2)$ on déduit immédiatement par transitivité :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\ (\ast)$$

   Application : $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

4. D'autres applications :

   a) Si $b = a$, la relation $(\ast)$ devient : $\cos 0 = \cos^2 a + \sin^2 a$, c'est-à-dire : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

   b) Si $b = -a$, la relation $(\ast)$ devient : $\cos 2a = \cos a \cos(-a) + \sin a \sin(-a)$.

   Et tenant compte de : $\cos(-a) = \cos a$ et $\sin(-a) = -\sin a$, on obtient : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

   D'une part : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$ d'où : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.

   D'autre part : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$ d'où : $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

   Calcul des valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \text{ et comme } \cos\frac{\pi}{8} > 0, \text{ il vient : } \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \text{ et comme } \sin\frac{\pi}{8} > 0, \text{ il vient : } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$