BACCALAURÉAT BLANC

Février 2005

MATHÉMATIQUES

SÉRIE **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures — COEFFICIENT : **9**

L'exercice n°3 est <u>à rédiger sur une copie séparée</u> sur laquelle les candidats feront apparaître clairement la mention "SPÉCIALITÉ".

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

*L'usage des appareils électroniques **est interdit***
excepté celui de la calculatrice qui est autorisé.

Les élèves doivent traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P

Exercice 1 (3 points)

On considère une suite de réels (u_n) et les propriétés suivantes :

- la suite (u_n) est majorée
- la suite (u_n) est croissante
- la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

1. Donner la traduction mathématique de ces trois propriétés.
2. Répondre aux questions suivantes par OUI ou NON. (Les réponses OUI seront justifiées par une démonstration et les réponses NON par une argumentation laissée à la libre appréciation du candidat, en particulier un graphique sera accepté)

   (a) Une suite (u_n) croissante est-elle nécessairement divergente vers $+\infty$?

   (b) Une suite (u_n) divergente vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante ?

   (c) Une suite (u_n) croissante et non majorée diverge-t-elle nécessairement vers $+\infty$?

Exercice 2 (4 points)

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Variations de la fonction f	0	↘	-1	↗	0	↗	2	↘	1

1. On considère les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t\ ,\quad J=\int_{-5}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K=\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Pour une seule des ces intégrales, on peut affirmer qu'elle est positive, et pour une seule, on peut affirmer qu'elle est négative. Préciser ces deux intégrales et justifier ce choix.

2. À l'aide des informations contenues dans le tableau de variations de f, donner un encadrement par des nombres entiers de chacune des intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad B=\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. On définit, pour tout réel x, la fonction F par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Déterminer deux entiers naturels a et b strictement positifs tels que $a \leqslant F(2) \leqslant b$.

   (b) Etudier la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) Etudier le sens de variation de la fonction F.

Exercice 3 (5 points) SPÉCIALITÉ

Cet exercice porte sur l'ensemble des nombres entiers dont l'écriture décimale ne comporte que des chiffres 1 (par exemple, le nombre « mille cent onze » dont l'écriture décimale est 1111).

Son objectif est de répondre à la question :

« quels sont les entiers naturels non nuls qui possèdent un multiple de ce type ? »

On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = \underbrace{111...11}_{n}$.

(L'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1).

A. Cas des entiers 2005 et 2006

1. Trouver un diviseur de 2005 puis justifier la proposition suivante :

   « Aucun terme de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ n'est divisible par 2005 »

2. Existe-t-il un terme de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ qui soit divisible par 2006 ?

3. D'après ce qui précède, pouvez-vous déjà apporter des éléments de réponse à la question posée en tête de l'exercice ?

B. Cas de l'entier 2007

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $$a_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

2. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$. Démontrer l'égalité :

$$a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$$

3. On considère la division euclidienne par 2007 : expliquer pourquoi, parmi les 2008 premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

   Soient a_n et a_p ($n < p$) deux termes de la suite ayant le même reste. Quel est alors le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2007 ? En déduire que 2007 est un diviseur de $a_{p-n} \times 10^n$.

4. On peut vérifier facilement que 2007 et 10 sont premiers entre eux, ainsi que 2007 et 10^n (mais on ne vous demande pas de le faire). Que peut-on en déduire pour 2007 et a_{p-n} ?

5. 2007 possède-t-il un multiple parmi les entiers qui s'écrivent 111...11 ?

C. Bilan

Comment répondriez-vous à la question soulignée en tête de cet exercice ?

Exercice 4 **(8 points)**

- Partie A : questions de cours -

Prérequis pour cette partie A :

- l'exponentielle est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$
- l'exponentielle est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale à elle même.
- pour tout réel x : $$\mathbf{e}^{x}\,\mathbf{e}^{-x} = 1$$

1. Démontrer que : $$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x} = +\infty$$

   (On pourra minorer l'exponentielle par une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$)

2. En déduire la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.

- Partie B : étude d'une fonction auxiliaire -

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathbf{e}^{-x} - 1$$

1. a. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathbf{e}^{-x} = 0$)

   b. Étudier le sens de variation de la fonction φ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ qui sera notée α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

- Partie C : étude de la position relative de deux courbes et calcul d'une aire -

On donne deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)\,\mathbf{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$$

Leurs courbes dans un repère orthogonal, notées C_f et C_g, sont représentées ci-dessous. On notera que le graphique ne permet pas de les distinguer a priori et qu'elles sont très proches sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2} ; 0\right]$.

1. Justifier que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que les deux courbes C_f et C_g passent par le point A de coordonnées $(0 ; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.

3. a. Démontrer que pour tout réel x : $$f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$$

   où φ est la fonction étudiée dans la partie B.

   b. A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

4. a. Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer des réels a et b tels que la fonction $F : x \longmapsto (ax + b)\ \mathbf{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire qu'une primitive H de la fonction $f - g$ sur $\mathbb{R}$ est définie par : $$H(x) = F(x) - G(x) = \left(-2x - 3\right)\,\mathbf{e}^{-x} - \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

   d. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les deux droites verticales d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$. (Calculer la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-4} près)

Exercice 4 - Partie C -

Courbes C_f et C_g