Exercice 1 (3 points)

1. a) On a :

$$u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{2-u_2} = \frac{3}{4}$$

b) On a :

$$w_0 = 0$$

$$w_1 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 = \frac{2}{3}$$

$$w_3 = \frac{3}{4}$$

Les suites u et w coïncident pour $n = 0, 1, 2, 3$.

c) On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : u_n = w_n$$

- La propriété $\wp$ est initialisée (au rang 0) d'après la question 1.b)
- Soit n un certain entier et supposons $\wp(n)$.

  On a alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \overset{\wp(n)}{=} \frac{1}{2-w_n} = \frac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+1)-n} = \frac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$$

  D'où $\wp(n+1)$.

  La propriété $\wp$ est donc héréditaire.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout entier n.

C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = w_n$

2. a) On a : $\quad v_1 + v_2 + v_3 = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right) = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$

b) Faisons un calcul direct :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln k - \ln(k+1)) = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

Et par télescopie :

$$S_n = -\ln(n+1)$$

Autre méthode : on pouvait conjecturer le résultat ci-dessus grâce au calcul réalisé dans la question 2.a) puis faire le raisonnement par récurrence suivant :

On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : S_n = -\ln(n+1)$$

- La propriété $\wp$ est initialisée (au rang 1) car $S_1 = v_1 = -\ln 2$.
- Soit n un certain entier supérieur ou égal à 1 et supposons $\wp(n)$.

  On a alors :

$$S_{n+1} = S_n + v_{n+1} \overset{\wp(n)}{=} -\ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = -\ln(n+2)$$

  D'où $\wp(n+1)$.

  La propriété $\wp$ est donc héréditaire.

On en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = -\ln(n+1)$

Enfin, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

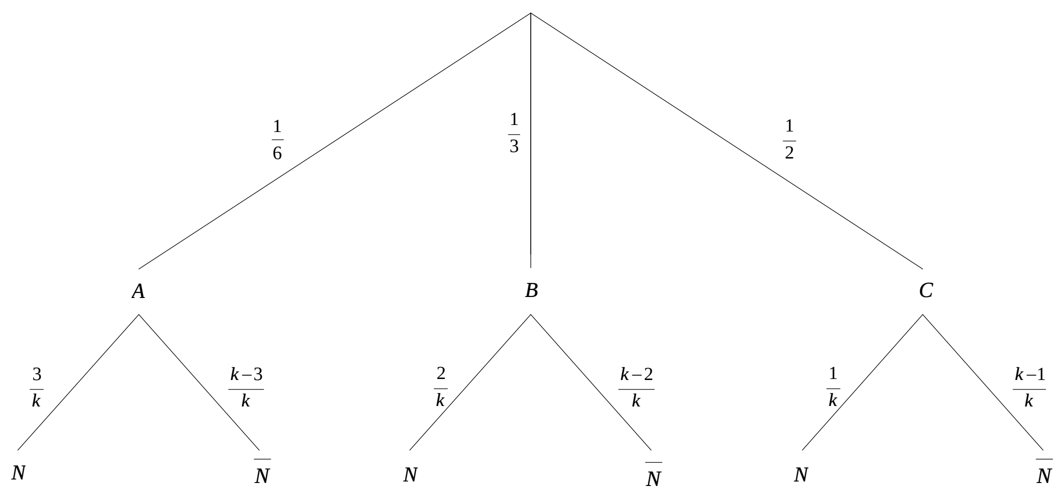
Exercice 2 (4 points)

L'urne U_1 contient trois boules noires et donc $k - 3$ boules blanches.

L'urne U_2 contient deux boules noires et donc $k - 2$ boules blanches.

L'urne U_3 contient une boule noire et donc $k - 1$ boules blanches.

L'arbre illustrant l'expérience aléatoire est le suivant :



1. a) D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $A \cup B \cup C$, on a :

$$P(N) = P(N \cap A) + P(N \cap B) + P(N \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{k} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} = \frac{10}{6k} = \frac{5}{3k}$$

   b) Il s'agit de calculer :

$$P_N(A) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{2k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{3}{10}$$

   c) On recherche le ou les entiers k pour lesquels :

$$P(N) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{3k} \geqslant \frac{1}{2}$$

Comme $3k > 0$: $\qquad 10 \geqslant 3k$

$$k \leqslant \frac{10}{3}$$

Et comme k est un entier naturel : $\qquad k \leqslant 3$

Par ailleurs, d'après l'énoncé $k \geqslant 3$, d'où : $\qquad k = 3$

d) Cette fois-ci, on résout : $\qquad P(N) = \frac{1}{30}$

$$\frac{5}{3k} = \frac{1}{30}$$

$$k = 50$$

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues en réalisant 20 parties indépendantes.

   X est donc binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = \frac{1}{30}$.

   La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{20} = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} \simeq 0{,}492 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Exercice 3 (8 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1. a) La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 + x + 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

Par ailleurs : $\qquad \lim_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{-x} = +\infty$

Donc par produit : $\qquad \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 + x + 1\right) \mathbf{e}^{-x} = +\infty$

Et finalement : $\qquad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$

Pour la limite en $+\infty$, développons $\varphi(x)$ afin de lever une indétermination (du type "$+\infty \times 0$") :

$$\varphi(x) = x^2\,\mathbf{e}^{-x} + x\,\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{-x} - 1$$

On sait que pour tout entier naturel n : $\qquad \lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathbf{e}^{-x} = 0$

D'où, par somme : $\qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -1$

b) La fonction φ est de la forme : $\qquad \varphi = uv - 1 \qquad$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + x + 1 \\ v(x) = \mathbf{e}^{-x} \end{cases}$

Comme les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction φ l'est aussi (par produit) et on a :

$$\varphi' = u'v + uv'$$

Ce qui donne, pour tout réel x :

$$\varphi'(x) = (2x+1)\,\mathbf{e}^{-x} + \left(x^2+x+1\right)\left(-\mathbf{e}^{-x}\right)$$

$$\varphi'(x) = \left(-x^2+x\right)\mathbf{e}^{-x} = x(1-x)\;\mathbf{e}^{-x}$$

On étudie le signe de φ' et les variations de φ à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$	Justification des signes
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$		
Signe de $(1-x)$		$+$		$+$	0	$-$		$1-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$
Signe de $\mathbf{e}^{-x}$		$+$		$+$		$+$		L'exponentielle est > 0 sur $\mathbb{R}$
Signe de la dérivée φ'		$-$	0	$+$	0	$-$		
Variations de la fonction φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3\mathbf{e}^{-1}-1$	$\searrow$	-1	

On calcule les valeurs des extremums locaux :

$$\varphi(0) = \mathbf{e}^{0} - 1 = 0 \quad ; \quad \varphi(1) = 3\mathbf{e}^{-1} - 1$$

2. Sur $]-\infty, 1[$, la fonction φ admet un unique minimum en 0 égal à 0, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle. On peut être plus formel en utilisant la stricte décroissance de φ (resp. stricte croissance) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ (resp $]0, 1[$) :

$$x \in\,]-\infty, 0[\;\Rightarrow\; x < 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow\; \varphi(x) > 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) \neq 0$$

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) = 0$$

$$x \in\,]0, 1[\;\Rightarrow\; 0 < x < 1 \Rightarrow\; \varphi(0) < \varphi(x) < \varphi(1) \;\Rightarrow\; 0 < \varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x) \neq 0$$

La seule solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]-\infty, 1[$ est bien $x = 0$.

Sur $[1, +\infty[$, on applique le théorème de bijection :

- φ est **continue** (car dérivable) sur $[1, +\infty[$.
- φ est **strictement décroissante** sur $[1, +\infty[$
- $\varphi(1) = 3\mathbf{e}^{-1} - 1 > \mathbf{0}$ (car $3 > \mathbf{e}$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -1 < \mathbf{0}$

En conséquence, il existe un unique réel α dans $[1, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

En effectuant un balayage à la calculatrice, on obtient l'encadrement suivant :

$$1{,}79 < \alpha < 1{,}80$$

3. On en déduit le signe de φ :

$$x \in\,]-\infty, \alpha] \;\Rightarrow\; \varphi(x) \geqslant 0$$

$$x \in [\alpha, +\infty[\;\Rightarrow\; \varphi(x) \leqslant 0$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de φ		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B : étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Remarquons que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x :

$$x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\qquad x^2 + x + 1 > 0$

1. On calcule facilement $f(0) = g(0) = 1$.

   Par conséquent, les deux courbes C_f et C_g passent bien par le point A de coordonnées (0 ; 1).

   Pour montrer qu'elles ont même tangente en A, il suffit de montrer que $f'(0) = g'(0)$.

   La fonction f est de la forme : $\qquad f = uv \qquad$ avec $\begin{cases} u(x) = (2x+1) \\ v(x) = \mathbf{e}^{-x} \end{cases}$

   Comme les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f (par produit) et on a :

   $$f' = u'v + uv'$$

   Ce qui donne, pour tout réel x :

   $$f'(x) = 2\,\mathbf{e}^{-x} + (2x+1)\left(-\mathbf{e}^{-x}\right) = (1-2x)\ \mathbf{e}^{-x}$$

   De même pour g en utilisant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient :

   $$g'(x) = \frac{2\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)^2}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

   On en déduit bien : $\qquad f'(0) = g'(0) = 1$

   Les courbes C_f et C_g ont bien la même tangente au point A (et son équation est $y = x + 1$)

2. a) En réduisant au même dénominateur, on obtient pour tout réel x :

   $$f(x) - g(x) = (2x+1)\,\mathbf{e}^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)\mathbf{e}^{-x} - (2x+1)}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

   b) On vu en préliminaire que pour tout réel x, on avait :

   $$x^2 + x + 1 > 0$$

   Le signe de $f - g$ ne dépend donc que de celui de $(2x + 1)$ et de celui de φ.

x	$-\infty$		$-1/2$		0		α		$+\infty$
Signe de $(2x+1)$		–	0	+		+		+	
Signe de φ		+		+	0	+	0	–	
Signe de $f-g$		–	0	+	0	+	0	–	

   c) On en déduit la position relative de C_f et C_g :

   sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, C_f est en dessous de C_g

   sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$, C_f est au dessus de C_g

   sur $]0, \alpha[$, C_f est au dessus de C_g

   sur $]\alpha, +\infty[$, C_f est en dessous de C_g

3. a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme différence, produit et composée de fonctions qui le sont) et :

$$h'(x) = -2\,\mathbf{e}^{-x} + (-2x-3)\left(-\mathbf{e}^{-x}\right) - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)\,\mathbf{e}^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x) - g(x)$$

b) Sur $\left]-\frac{1}{2}\,,\,0\right[$, on a $f - g > 0$. L'aire demandée est donnée, en unités d'aire, par :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \left[h(x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = h(0) - h\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + 2\sqrt{\mathbf{e}} + \ln 3 - \ln 4 \simeq 0{,}0098 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Exercice 4 (5 points)

Partie A

1. On peut calculer le discriminant Δ mais, ici, il est plus simple de canoniser :

$$z^2 - 2z + 4 = (z-1)^2 - 1 + 4 = (z-1)^2 + 3 = (z-1)^2 - 3\mathbf{i}^2 = \left(z - 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}\right)\left(z - 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}\right)$$

L'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ admet donc les deux solutions complexes conjuguées suivantes :

$$z' = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3} = 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z'' = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3} = 2\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$$

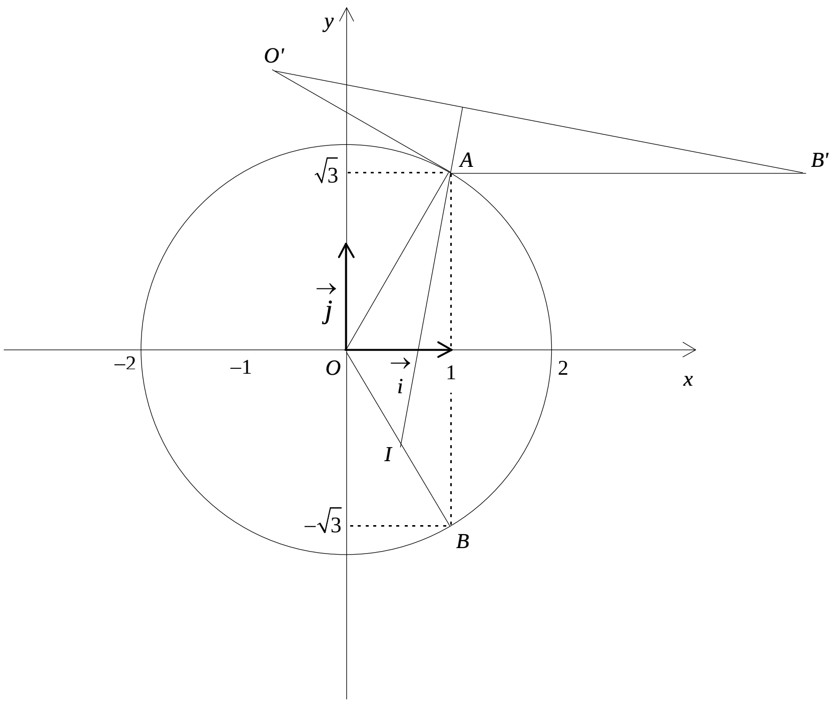
2. On a :

$$(z')^{2004} = 2^{2004}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2004\pi}{3}} = 2^{2004}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}668\pi} = 2^{2004}$$

Partie B

1. Les nombres complexes z' et z'' ont un module égal à 2. Donc les distances OA et OB sont égales à 2.

Les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.



2. En utilisant l'écriture complexe de r_1 : $z_{O'} - z_A = -\mathbf{i}(z_O - z_A)$

$$z_{O'} - z' = \mathbf{i}z'$$

$$z_{O'} = (1 + \mathbf{i})z' = (1 + \mathbf{i})\ \left(1+\mathbf{i}\sqrt{3}\right) = \left(1-\sqrt{3}\right)+\mathbf{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Sous forme exponentielle : $z_{O'} = 2\sqrt{2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\ 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{12}}$

On procède de même pour l'affixe de B' :

$$z_{B'} - z' = \mathbf{i}(z'' - z')$$

$$z_{B'} = 2\sqrt{3}\ + 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$$

3. a) Conjecture : la droite (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle $AO'B'$

   b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$ est :

$$z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = \frac{1}{2}z'' - z' = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est :

$$z_{\overrightarrow{O'B'}} = z_{B'} - z_{O'} = 2\sqrt{3}\ + 1 + \mathbf{i}\sqrt{3} - \left(1-\sqrt{3}\right) - \mathbf{i}\left(1+\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - \mathbf{i}$$

   c) On constate que : $2\mathbf{i}\, z_{\overrightarrow{AI}} = z_{\overrightarrow{O'B'}}$

   En passant aux arguments : $\frac{\pi}{2} + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AI}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{O'B'}\right)\ \ [2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{O'B'}\right) = \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$$

   On peut également montrer la nullité du produit scalaire des deux vecteurs.

   La conjecture émise à la question a) est vraie.

Remarque : il s'agit d'une configuration très classique (deux triangles rectangles dont le sommet de l'angle droit est commun)

Exercice 4 *Spécialité* (5 points)

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{matrix}0\\5\\5\end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BA}\left|\begin{matrix}0\\-5\\5\end{matrix}\right.$$

   Puis on calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{BA} = -25 + 25 = 0$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux

   On en déduit que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point A.

2. a. On sait qu'un cône de sommet O et d'axe (Oz) a pour équation :

$$x^2 + y^2 = r^2z^2 \text{ où } r \text{ est un réel strictement positif}$$

   Or, le point $A(0 ; 5 ; 5)$ appartient au cône Γ donc $r = 1$ d'où une équation de Γ :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

   b. Une équation de la spère $\mathscr{S}$ (ayant pour centre B) est donnée par :

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2 = R^2$$

où R est le rayon de la sphère. Ici, $R^2 = BA^2 = 50$ d'où une équation de $\mathscr{S}$:

$$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 50$$

L'intersection de Γ et de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ solutions du système :

$$(S)\ \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 20z = -50 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre les deux équations, nous obtenons :

$$2z^2 - 20z + 50 = 0$$

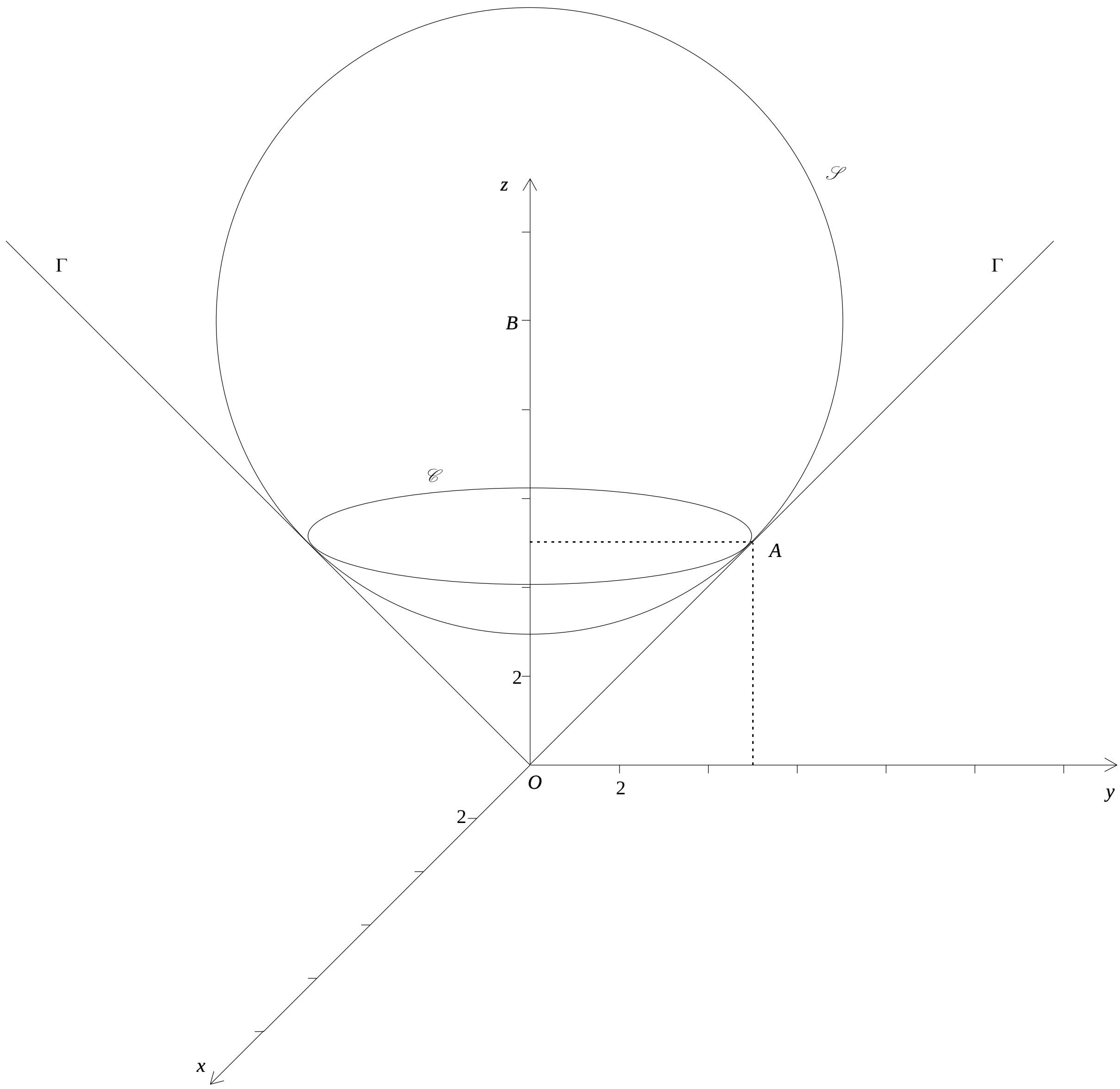
$$z = 5$$

D'où : $$(S)\ \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Nous reconnaissons ici la caractérisation d'un cercle $\mathscr{C}$ contenu dans le plan Q d'équation $z = 5$ dont une équation rapportée au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $x^2 + y^2 = 25$.

Ce cercle a pour centre le point de coordonées $(0\,;\,0\,;\,5)$ et pour rayon 5.

c. Schéma :



3. On sait que la section d'un cône de sommet O et d'axe (Oz) par un plan d'équation $x = a$ $(a \neq 0)$ est une hyperbole. En effet, nous avons ici :

$$M(x, y, z) \in P_1 \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

Posons $u = z - y$ et $v = z + y$ ainsi :

$$M(x, y, z) \in P_1 \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ uv = 1 \end{cases}$$

Et la courbe d'équation $uv = 1$, dans le plan P_1, est bien celle d'une hyperbole, c.q.f.d.

La section du cône Γ par le plan P_1 est donc représentée par la figure 3.

4. Raisonnons par l'absurde en supposant que x et y sont tous deux impairs. Il existerait alors deux entiers relatifs m et n tels que :

$$x = 2m + 1 \text{ et } y = 2n + 1$$

On aurait alors : $$x^2 = 4m^2 + 4m + 1$$

D'où : $$x^2 \equiv 1 \, [4]$$

De même : $$y^2 \equiv 1 \, [4]$$

D'où : $$x^2 + y^2 \equiv 2 \, [4]$$

Et comme $x^2 + y^2 = z^2$ (équation du cône Γ) il vient :

$$z^2 \equiv 2 \, [4]$$

Par ailleurs, x et y étant impairs (et donc x^2 et y^2 aussi), z est nécessairement pair.

Il existe donc un entier z' tel que : $$z = 2z'$$

D'où : $$z^2 = 4z'^2$$

$$z^2 \equiv 0 \, [4]$$

D'où une contradiction car un entier ne peut pas être congru à 0 et à 2 modulo 4.

Conclusion : x et y ne sont pas simultanément impairs.