Dans ce devoir, on s'interesse aux suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On note E l'ensemble des suites réelles qui vérifient cette relation de récurrence.

Partie A - Stabilité de l'ensemble *E*

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l'ensemble E.

Soient λ et μ deux réels quelconques.

Démontrer que la suite (c_n) définie par $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$ appartient aussi à l'ensemble E.

Partie B - Recherche de suites géométriques appartenant à *E*

Soit (a_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Comment choisir q pour que la suite (a_n) soit élément de l'ensemble E ?

(On notera q_1 et q_2 les deux solutions obtenues avec $q_1 < q_2$)

Partie C - Suite de Fibonacci

On appelle "suite de Fibonacci" la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
2. Déterminer les valeurs de λ et μ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$

3. Démontrer que : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(Cette limite est le "nombre d'or")

4. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$$

5. <u>Question pour les spécialistes</u> : en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, PGCD$(u_n, u_{n+1}) = 1$

Partie D - Somme des termes de la suite de Fibonacci

On note (u_n) la suite de Fibonacci (définie à la partie C) et S_n la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = u_{n+2} - 1$

Partie A - Stabilité de l'ensemble E

Pour tout entier naturel n, on a :

$$c_{n+2} = \lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2} = \lambda(a_{n+1} + a_n) + \mu(b_{n+1} + b_n) = \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} + \lambda a_n + \mu b_n = c_{n+1} + c_n$$

La suite (c_n) est donc bien un élément de l'ensemble E.

On a montré que l'ensemble E est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Partie B - Recherche de suites géométriques appartenant à E

Une suite géométrique (a_n) de raison q est définie pour tout entier n par :

$$a_n = a_0\, q^n$$

La suite (a_n) est élément de l'ensemble E si et seulement si on a pour tout entier naturel n :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$a_0\, q^{n+2} = a_0\, q^{n+1} + a_0\, q^n$$

$$a_0 q^n(q^2 - q - 1) = 0$$

Si $a_0 = 0$ ou $q = 0$ alors (a_n) est une suite nulle ce qui n'a pas grand intérêt. Dans les autres cas, on a :

$$q^2 - q - 1 = 0$$

La suite géométrique (a_n) est soit nulle soit de raison q égale à l'une des deux valeurs :

$$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Partie C - Suite de Fibonacci

1. Calcul des premiers termes :

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = 2$$

$$u_4 = 3$$

$$u_5 = 5$$

$$u_6 = 13$$

2. En spécialisant $n = 0$, la relation $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ devient :

$$0 = \lambda + \mu$$

$$\mu = -\lambda$$

En spécialisant $n = 1$, la relation $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ devient :

$$1 = \lambda q_1 + \mu q_2 = \mu(q_2 - q_1) = \mu\sqrt{5}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{5}}{5}\ ;\ \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

On a donc explicitement, pour tout entier naturel n :

$$u_n = -\frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(Et en particulier, le réel ci-dessus est un entier !)

3. On a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda q_1^{n+1} + \mu q_2^{n+1}}{\lambda q_1^n + \mu q_2^n} = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1^n - q_2^n}$$

   En mettant q_2^n en facteur au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q_1\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n - q_2}{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n - 1}$$

   Or, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \in \left]-1\ ;\ 1\right[$.

   Donc, la suite $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n$ converge vers 0. Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

4. Considérons la propriété $\wp$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\wp(n) : u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$$

   - On a $u_2u_0 - u_1 = 1 \times 0 - 1 = -1 = (-1)^1$ d'où $\wp(1)$.
   - Soit n un certain entier naturel non nul et supposons $\wp(n)$. On a alors :

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1} + u_n)u_n - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} \overset{\wp(n)}{=} (-1)^{n+1}$$

     D'où $\wp(n+1)$.

   La propriété $\wp$ est initialisée (au rang 1) et héréditaire (à partir du rang 1), on déduit du principe de raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a $\wp(n)$:

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$$

5. <u>Question pour les spécialistes</u> :

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   D'après la question 4, il existe un couple (U, V) d'entiers relatifs (à savoir $(U, V) = (u_{n-1}, u_n)$) tel que :

$$u_{n+1}U - u_nV = (-1)^n$$

   D'après le théorème de Bézout, on en déduit :

$$\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$$

Partie D - Somme des termes de la suite de Fibonacci

1. On a : $$S_0 = u_0 = 0$$
$$S_1 = u_0 + u_1 = 0 + 1 = 1$$
$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 0 + 1 + 1 = 2$$
$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0 + 1 + 1 + 2 = 4$$
$$S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

2. On considère la propriété Q définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$Q(n) : S_n = u_{n+2} - 1$$

La propriété Q est initialisée au rang 0 (voir question 1).

Supposons $Q(n)$ pour un certain entier n : $\quad S_n = u_{n+2} - 1$

En ajoutant u_{n+1} : $\quad S_n + u_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} - 1$

D'où : $\quad S_{n+1} = u_{n+3} - 1$

C'est-à-dire : $\quad Q(n + 1)$

On en déduit que la propriété Q est vraie pour tout n. CQFD.

Autre méthode :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(u_{k+2} - u_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+2} - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = u_{n+2} - u_1 = u_{n+2} - 1$$