Le but de ce devoir est d'étudier la fonction tangente et d'en établir quelques propriétés.

1. Résoudre, sur $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation : $\cos x = 0$

   En déduire toutes les solutions, sur $\mathbb{R}$, de cette équation.

2. On considère la fonction tangente, notée tan, et définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pour } x \in D \text{ où } D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

   On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\ \vec{i}, \vec{j}\ )$

   a. Étudier la parité de cette fonction.

   b. Démontrer que la fonction tangente est π–périodique.

   c. Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier la fonction tangente sur l'intervalle $I = [0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$.

3. Étudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.

   En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on précisera la nature et l'équation.

4. Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$				

(On donnera les valeurs exactes)

5. Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

   En déduire le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle I.

6. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

   b. Démontrer que pour tout $x \in I$, on a :

$$\tan x \geqslant x$$

(On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$)

   c. En déduire, la position relative de la courbe C par rapport à sa tangente T.

7. Tracer, très soigneusement, les droites Δ et T puis la courbe C. (On se placera entre les bornes -2π et 2π)

8. On rappelle que pour tous réels a et b, on a les formules d'additions suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

   En déduire une formule liant $\tan(a + b)$ à $\tan a$ et $\tan b$. (Pour des réels a et b tels que $a \in D$, $b \in D$ et $a + b \in D$)

9. Démontrer que pour tout $a \in\ ]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan a = \frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$$

   En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$ et de $\tan\frac{\pi}{12}$.

1. On a : $$S_{]-\pi\,;\,\pi]} = \{-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\}$$

   D'où : $$S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

   Ce que l'on peut encore écrire : $$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

2. a. D est un ensemble symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, on a :
   $$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$
   Ce qui prouve que la fonction tangente est impaire sur D.

   b. Pour tout $x \in D$, on a $x + \pi \in D$ et :
   $$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$
   La fonction tangente est donc π–périodique.

   c. Comme la fonction tangente est π–périodique, on peut se contenter de l'étudier sur une période, par exemple $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$. Comme elle est, de plus, impaire, on peut encore couper l'intervalle d'étude en deux et ne l'étudier que sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$. L'étude sur $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0]$ s'en déduira par symétrie par rapport à l'origine du repère.

3. On sait que : $$\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

   Donc, par quotient : $$\lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$$

   On sait que : $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0 \text{ avec } \cos x > 0$$

   Donc, par quotient : $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

   La courbe C admet donc une asymptote verticale Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

4. D'après les valeurs remarquables du sinus et du cosinus, on a :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5. La fonction tan est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u = \sin$ et $v = \cos$.

   Sa dérivée tan′ sera donc égale à $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, ce qui donne pour $x \in I$:
   $$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
   Et comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il vient :
   $$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

   Par ailleurs : $$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

   D'où : $$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$$

Sens de variation : puisque $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ est strictement positif pour tout réel x de I, on en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur I :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $\tan'$	$+$	
variations de $\tan$	$0 \nearrow$	$+\infty$

6. a. Une équation de la tangente à une courbe représentant une fonction f dérivable en x_0 est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Avec $x_0 = 0$, cela donne : $y = f'(0)x + f(0)$

Ici, nous avons $\tan 0 = 0$ et $\tan' 0 = 1$, d'où :

$$T : y = x$$

b. La fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$$

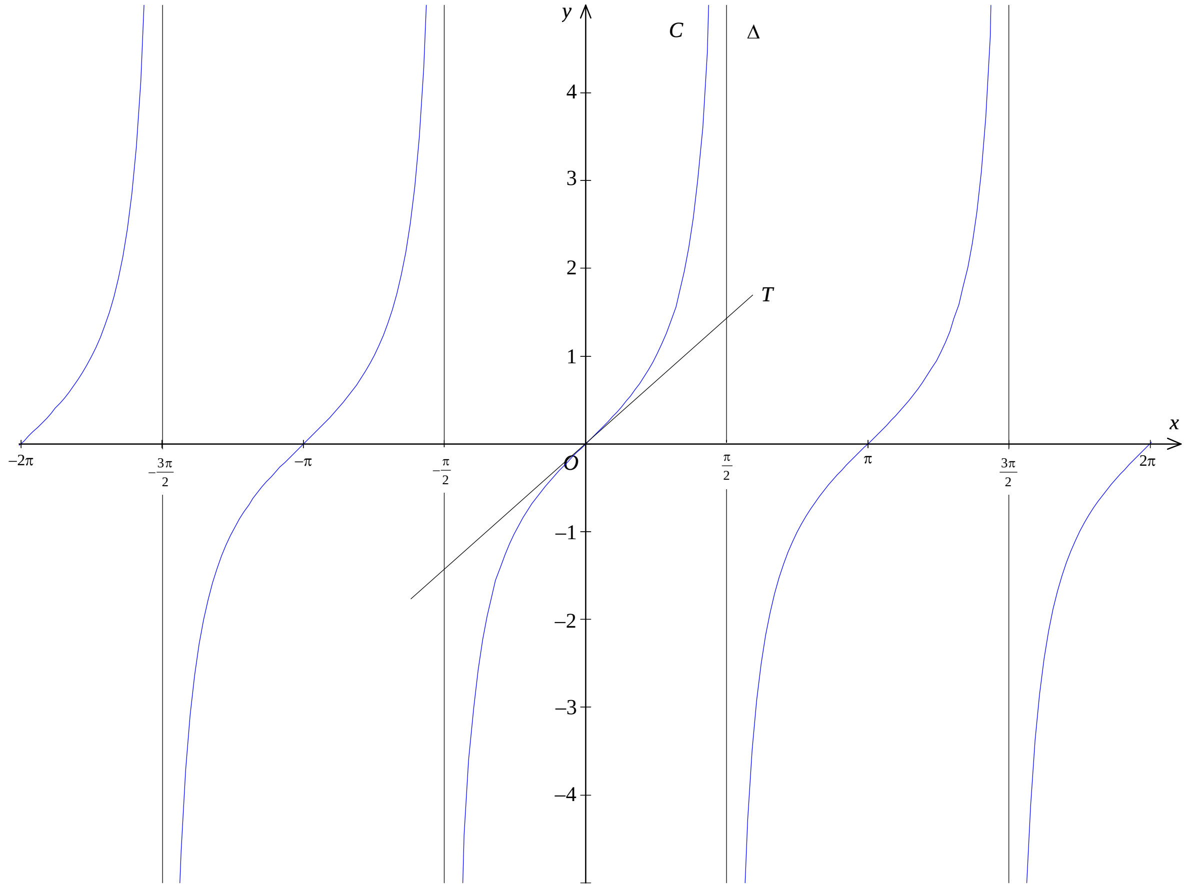
Donc g est strictement croissante sur I.

En outre $g(0) = 0$. On en déduit que g est positive sur I, c'est-à-dire :

$$\tan x \geqslant x$$

c. En conséquence, la courbe C est au dessus de sa tangente T sur I.

7. A partir de la courbe de la fonction tangente sur I, on complète par symétrie (par rapport à O) pour obtenir la courbe sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ puis par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$) pour obtenir les autres morceaux.



8. On a, pour tous réels a et b tels que $a + b \in D$:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Comme $a \in D$ et $b \in D$, on peut diviser numérateur et dénominateur par cos a cos b (qui est non nul) :

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

9. Partons du membre de droite. D'après les formules d'additions appliquées avec $b = a$, on obtient :

$$\frac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)} = \frac{1-(\cos^2 a - \sin^2 a)}{2\sin a \cos a} = \frac{(1-\cos^2 a)+\sin^2 a}{2\sin a \cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a \cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

En particulier avec $a = \dfrac{\pi}{8}$, cela donne :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Et avec $a = \dfrac{\pi}{12}$, cela donne :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$