Les énoncés de ces exercices avec "prises d'initiatives" ne donnent pas le fil directeur d'un raisonnement.
En effet, il y a parfois plusieurs voies possibles (ou plusieurs outils possibles) pour parvenir au résultat.
À chacun de rechercher la (ou plutôt sa) solution suivant sa propre vision des choses et aussi ses goûts.

Les qualités souhaitées pour réussir ces exercices sont de cet ordre :

- arriver à émettre une conjecture
- savoir abandonner une piste qui s'avère être infructueuse sans non plus renoncer trop vite. Il faut aussi parfois insister un peu, voire provoquer la chance !
- savoir trouver un contre-exemple. (Imaginez que cela fait des heures que vous cherchez à démontrer un résultat... Mais au fond, est-il vrai ? Alors, mettez-vous à chercher un contre-exemple, cela peut s'avérer très expéditif...)
- savoir organiser ses idées et les mettre en relation avec les différents outils de cours pour élaborer une démonstration.
- procéder par "analyse/synthèse". Ce raisonnement est très porteur en Mathématiques. Il s'agit, **temporairement**, de supposer le problème résolu. Quelles observations peut-on alors faire ? Quelles propriétés remarque-t-on ? Cela permet de trouver des liens intermédiaires. Ensuite, évidemment, on réorganise toutes ces propriétés pour rédiger les choses dans le bon ordre !
- arriver à décloisonner les savoirs ! Si on bute sur un exercice de chapitre X, la clé, elle, se trouve peut-être dans un autre chapitre !
- ne pas baisser les bras tout de suite et oser griffonner diverses idées au brouillon. La Science infuse, cela n'existe pas !

Exercice 1

1. On considère, dans le plan, un parallélogramme $ABCD$.

   Soit M_0 un point quelconque du plan.

   On construit successivement :

   - le point M_1 symétrique de M_0 par rapport à A,
   - le point M_2 symétrique de M_1 par rapport à B,
   - le point M_3 symétrique de M_2 par rapport à C,
   - le point M_4 symétrique de M_3 par rapport à D.

   a. Faire une figure (ou plusieurs). Quelle conjecture peut-on émettre au sujet de la position du point M_4 ?

   b. Démontrer cette conjecture.

2. On fait maintenant la même construction mais en supposant que $ABCD$ est un carré.

   a. Refaire une figure (ou plusieurs).

   Quelle conjecture peut-on émettre au sujet des diagonales du quadrilatère obtenu ?

   b. Démontrer cette conjecture.

Exercice 2

On considère une suite (u_n) à termes strictement positifs et la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On justifiera les propositions vraies en faisant une démonstration et on donnera un contre-exemple aux propositions fausses)

1. Si (u_n) est croissante, alors (v_n) est décroissante.
2. Si (u_n) est minorée par 1, alors (v_n) est majorée par 1.
3. Si (u_n) est bornée, alors (v_n) est bornée.
4. Si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0.
5. Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.

Exercice 3

On a vu dans le cours sur l'exponentielle que pour tout réel x, on a

$$x \leqslant \mathbf{e}^x$$

A-t-on aussi, pour tout réel x : $2x \leqslant \mathbf{e}^x$?

A-t-on aussi, pour tout réel x : $3x \leqslant \mathbf{e}^x$?

Déterminer le plus grand réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$ax \leqslant \mathbf{e}^x$$

Interpréter graphiquement.

Exercice 4

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On considère une variable aléatoire X prenant des valeurs des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ respectivement.

Démontrer que l'espérance $E(X)$ minimise la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 p_i$$

Quel est alors la valeur du minimum de f ?

Formulaire pour l'exercice 4 :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

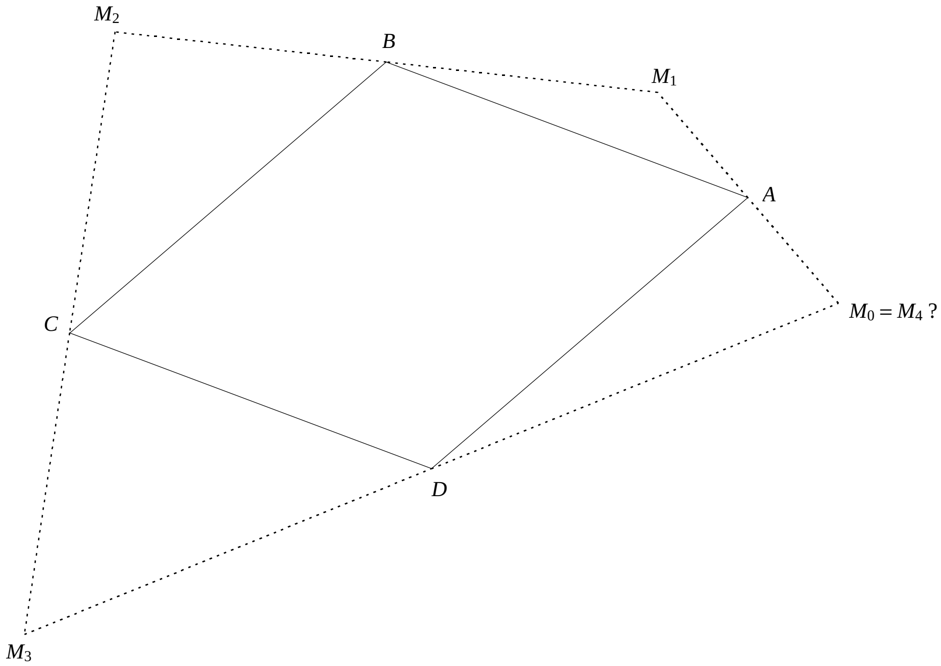
$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exercice 1

1. a. Expérimentons à l'aide de plusieurs figures

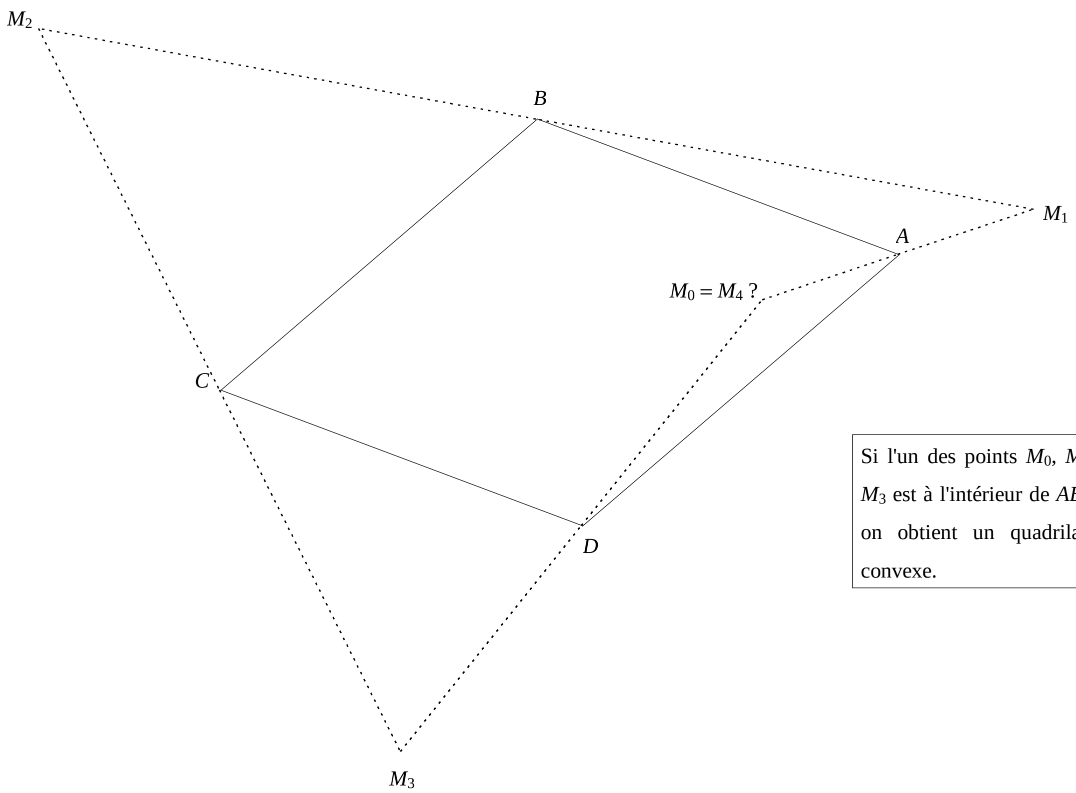
Figure 1 : M_0 est à l'extérieur de $ABCD$



Conjecture : $\boldsymbol{M_4 = M_0}$

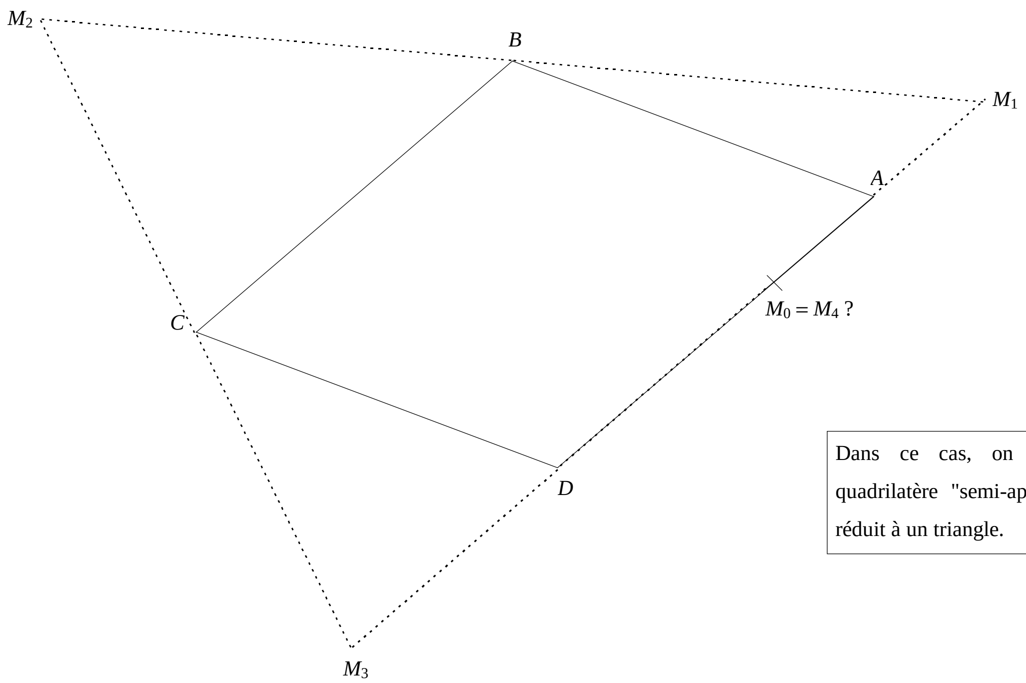
Contrôlons la conjecture avec d'autres figures.

Figure 2 : M_0 est à l'intérieur de $ABCD$



Si l'un des points M_0, M_1, M_2 ou M_3 est à l'intérieur de $ABCD$ alors on obtient un quadrilatère non convexe.

Figure 3 : M_0 est sur $ABCD$



Dans ce cas, on obtient un quadrilatère "semi-aplati" qui se réduit à un triangle.

Figure 4 : obtention d'un quadrilatère "croisé"

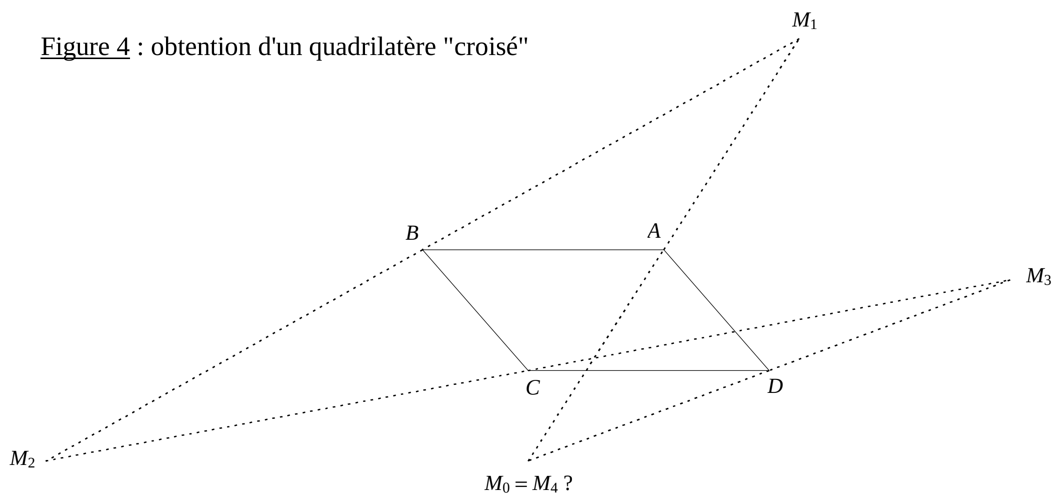
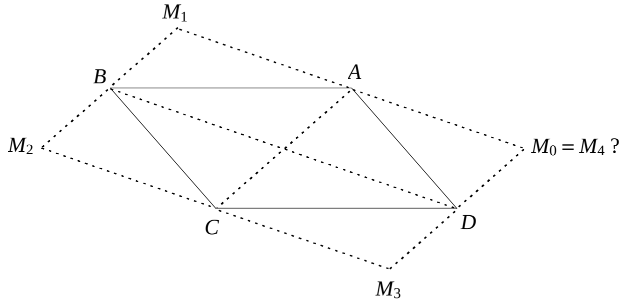


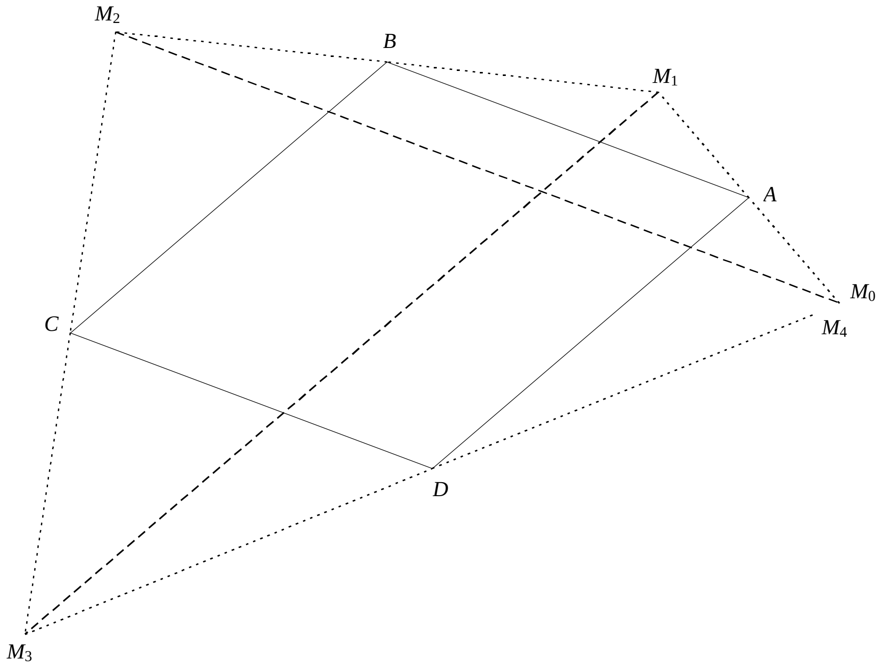
Figure 5 : obtention d'un quadrilatère particulier (ici un parallélogramme)

Pour arriver à un tel résultat, il suffit de choisir M_0 de façon que : (AM_0) // (BD) et (DM_0) // (AC)



b. <u>Démonstration</u>

Refaisons une figure "fausse" en distinguant bien la position de M_4 de M_0 (a priori, on ne sait pas qu'ils sont confondus, c'est justement ce qu'on veut prouver et raisonner avec une figure sur laquelle M_4 est confondu avec M_0 risque d'induire une erreur de raisonnement, à savoir utiliser à un moment ou un autre le résultat que l'on souhaite prouver...)



<u>Premier raisonnement</u> (*du "type collège" en utilisant le théorème des milieux*)

Traçons le segment $[M_0M_2]$.

Comme A est le milieu de $[M_0M_1]$ et B le milieu de $[M_1M_2]$, le théorème des milieux appliqué dans le triangle $M_0M_1M_2$ permet d'affirmer que : $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\,\overrightarrow{AB}$

De même, en raisonnant dans le triangle $M_2M_3M_4$, on a :

$$\overrightarrow{M_4M_2} = 2\,\overrightarrow{DC}$$

Or, par hypothèse, $ABCD$ est un parallélogramme donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

D'où : $\overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{M_4M_2}$

Et d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{M_0M_4} = \vec{0}$

D'où : $M_0 = M_4$

<u>Deuxième raisonnement</u> (*avec les nombres complexes*)

Munissons le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

Notons a, b, c, d, z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes de A, B, C, D, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans ce repère.

Par hypothèse, on a : $2(b - a) = 2(c - d)$

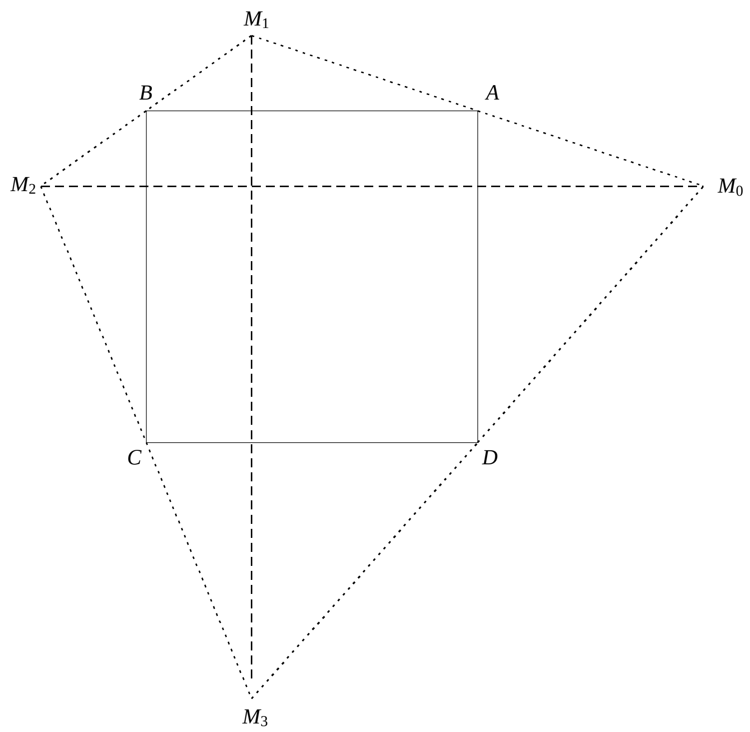
$$(z_1 + z_2) - (z_0 + z_1) = (z_2 + z_3) - (z_3 + z_4)$$

$$z_2 - z_0 = z_2 - z_4$$

$$z_0 = z_4$$

$$M_0 = M_4$$

2. a.



Conjecture :

les segments [M_0M_2] et [M_1M_3] sont perpendiculaires et de même longueur.

b. <u>Démonstration</u>

<u>Premier raisonnement</u> (*du "type collège" en utilisant le théorème des milieux*)

On a vu que : $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\,\overrightarrow{AB}$

De même, en raisonnant dans le triangle $M_1M_2M_3$, on a :

$$\overrightarrow{M_1M_3} = 2\,\overrightarrow{BC}$$

Or, $AB = BC$ d'où : $M_0M_2 = M_1M_3$

Ce qui prouve déjà que les diagonales du quadrilatère $M_0M_1M_2M_3$ ont même longueur.

De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Il en est donc de même $\overrightarrow{M_0M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Ce qui prouve que les diagonales du quadrilatère $M_0M_1M_2M_3$ sont perpendiculaires.

<u>Deuxième raisonnement</u> (*avec les nombres complexes*)

Munissons le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

Puisque $ABCD$ est un carré, le point D est l'image de B par un quart de tour de centre A, donc :

$$d - a = \pm\mathbf{i}(b - a)$$

(signe + si $ABCD$ est de sens direct comme sur la figure, signe − sinon)

Et comme $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{M_1M_3} = 2\,\overrightarrow{AD}$, il vient :

$$z_3 - z_1 = 2(d - a) = \pm 2\mathbf{i}(b - a) = \pm\mathbf{i}(z_2 - z_0)$$

En passant aux modules, on obtient : $M_1M_3 = M_2M_0$

Enfin, on a :

$$(\overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = (\overrightarrow{M_0M_2}, \vec{e_1}) + (\vec{e_1}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_0) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_0}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

On a bien prouvé que les diagonales de $M_0M_1M_2M_3$ sont perpendiculaires et de même longueur.

Exercice 2

On considère une suite (u_n) à termes strictement positifs et la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ? (On justifiera les propositions vraies en faisant une démonstration et on donnera un contre-exemple aux propositions fausses)

1. VRAI. Preuve :

   Puisque (u_n) est croissante et à termes strictement positifs, on a pour tout entier n :

   $$0 < u_n \leqslant u_{n+1}$$

   Par décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

   $$\frac{1}{u_n} \geqslant \frac{1}{u_{n+1}}$$

   $$v_n \geqslant v_{n+1}$$

   La suite (v_n) est donc décroissante.

2. VRAI. Preuve :

   Comme (u_n) est minorée par 1, on a pour tout entier n :

   $$1 \leqslant u_n$$

   Par décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

   $$\frac{1}{u_n} \leqslant 1$$

   $$v_n \leqslant 1$$

   La suite (v_n) est majorée par 1.

3. FAUX. Contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

   La suite (u_n) est bornée (minorée par 0 et majorée par 1).

   Et pourtant, on obtient : $v_n = n$

   La suite (v_n) n'est pas bornée (car non majorée).

   Remarque : si (u_n) est bornée par deux réels m et M **strictement positifs**, alors (v_n) est aussi bornée.

   (Adapter la question 2 pour le prouver)

4. FAUX. Contre-exemple : $u_n = 2 + (-1)^n$

   On a ajouté 2 pour obtenir la stricte positivité de la suite (u_n).

   La suite (u_n) diverge et la suite (v_n) aussi. ($v_{2p} = \frac{1}{3}$ et $v_{2p+1} = 1$)

   Remarque : si (u_n) **diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$)** alors (v_n) converge vers 0.

5. FAUX. Contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

   La suite (u_n) converge vers 0 et pourtant la suite (v_n) diverge vers $+\infty$. (Car $v_n = n$)

Exercice 3

Considérons la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_2(x) = \mathbf{e}^x - 2x$$

La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f_2'(x) = \mathbf{e}^x - 2$$

On a : $$f_2'(x) \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln 2$$

On en déduit les variations de f_2 :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de f_2'		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f_2		$\searrow$	$2(1-\ln 2)$	$\nearrow$	

La fonction f_2 admet un minimum en ln 2 et :

$$f_2(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0 \text{ car } \mathbf{e} > 2$$

En conséquence, la fonction f_2 est positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$2x \leqslant \mathbf{e}^x$$

Par contre, l'inégalité $3x \leqslant \mathbf{e}^x$ n'est pas vérifiée pour tout réel x. En effet, pour $x = 1$, on a : $3 > \mathbf{e}$.

Recherchons maintenant le plus grand réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$ax \leqslant \mathbf{e}^x$$

On a vu, ci-dessus, que l'inégalité était valable sur $\mathbb{R}$ en choisissant $a = 2$.

On peut donc supposer $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathbf{e}^x - ax$$

La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f_a'(x) = \mathbf{e}^x - a$$

On a : $$f_a'(x) \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^x - a \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln a$$

On en déduit les variations de f_a :

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
Signe de f'_a		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f_a	$\searrow$		$a(1-\ln a)$		$\nearrow$

La fonction f_a admet un minimum en $\ln a$ et :

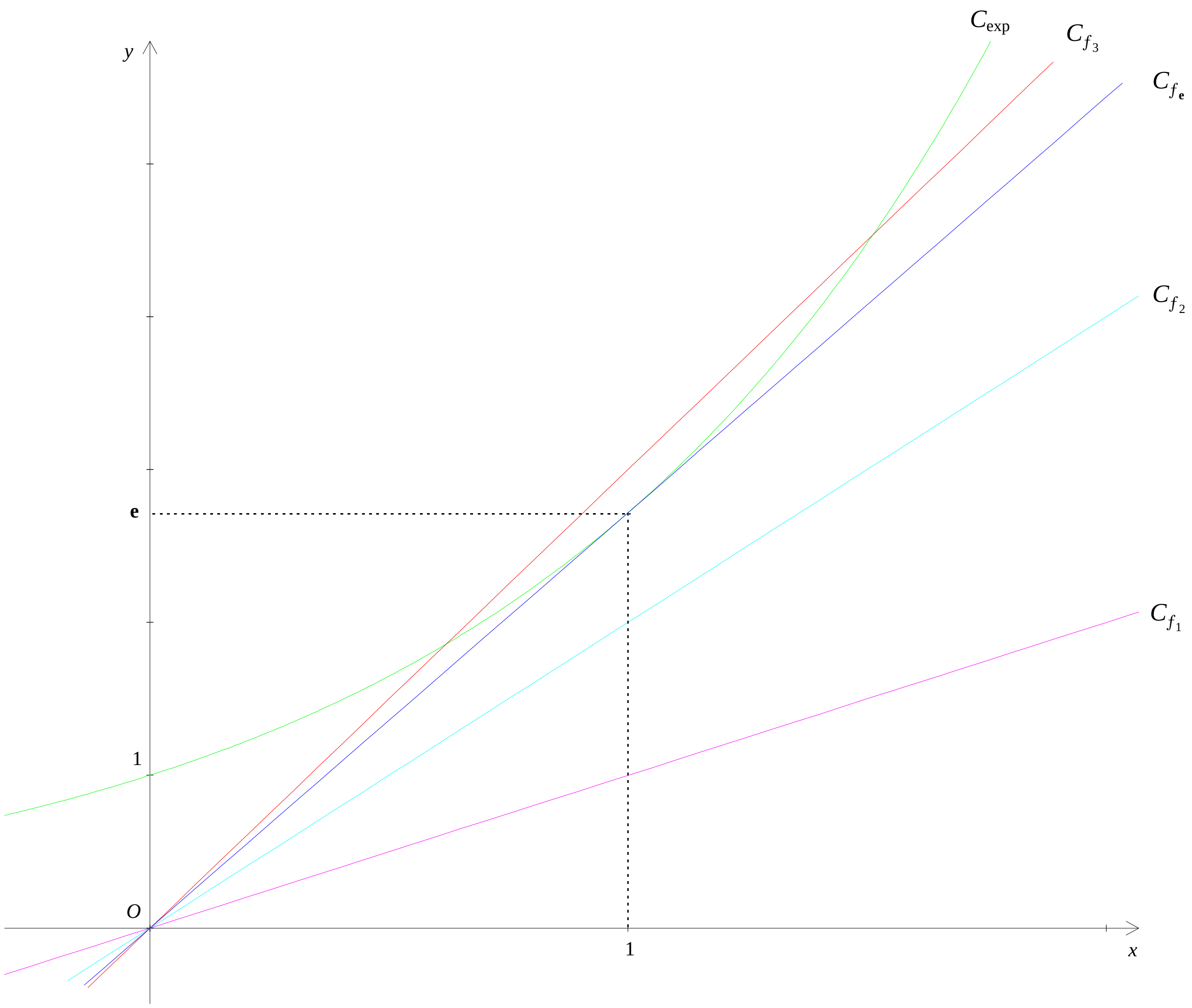
$$f_a(\ln a) = a - a\ln a = a(1-\ln a)$$

La fonction f_a est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son minimum l'est. Et comme on a supposé $a > 0$, il vient :

$$f_a \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R} \iff 1 - \ln a \geqslant 0 \iff a \leqslant \mathbf{e}$$

Le plus grand réel a recherché est donc : $a = \mathbf{e}$

Représentation graphique :



Pour $a = 1$ ou $a = 2$, les droites représentant les fonctions linéaires f_a sont situées sous la courbe de l'exponentielle (puisque que l'on a $f_a \leqslant \exp$ sur $\mathbb{R}$) . Par contre, la droite représentant f_3 coupe la courbe de l'exponentielle en deux points. Enfin, la droite représentant $f_{\mathbf{e}}$ est tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse **e** et le coefficient directeur de cette tangente est **e**.

Exercice 4

La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)p_i = -2\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - 2x\sum_{i=1}^{n} p_i = -2(E(X) - x)$$

D'où : $$f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant E(X)$$

On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		$E(X)$		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f	↘		$V(X)$		↗

Donc f admet un minimum en $E(X)$ et ce minimum est :

$$f(E(X)) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i = V(X)$$