

La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 ROC (2 points)

Question de cours

Soient u et v des fonctions dérivables, dont la dérivée est continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Application : déterminer une primitive de la fonction logarithme népérien.

Exercice 2 QCM (4 points)

Une seule réponse exacte par question. La trouver rapporte 1 point, ne pas répondre 0 et se tromper $-0,5...$

Aucune justification n'est demandée dans ce QCM.

1. Parmi ces quatre intégrales, une seule est égale à 0,69. Laquelle ?

$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

$J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$K = \int_0^1 (x+0,19) dx$

$L(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$, pour $x > 0$

2. Parmi ces quatre intégrales, une seule est non nulle, laquelle ?

$I = \int_0^{2\pi} \sin x dx$

$J = \int_{-1}^1 \frac{x \sin(x^2)}{1+x^2} dx$

$K = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$

$L = \int_{-1}^1 x e^x dx$

3. La fonction F définie sur tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ est :

croissante sur \mathbb{R}

décroissante sur \mathbb{R}

croissante sur \mathbb{R}_- puis décroissante sur \mathbb{R}_+

décroissante sur \mathbb{R}_- puis croissante sur \mathbb{R}_+

4. Question avec prise d'initiative

Dans un repère orthogonal, l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$, en unité d'aire, est :

e

1

e^{-1}

$e - 1$

Exercice 3 (4 points)

On considère les intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

1. Calculer $I - 3J$ et $I + J$.
2. En déduire la valeur exacte de I et de J .

Exercice 4 (10 points)

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Note : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

Par exemple : $5! = 120$

On remarquera que :

$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) par : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Par exemple, on a :

$$u_6 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} \approx 2,718 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

1. Dans cette question, on montre que la suite (u_n) converge.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b. Démontrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k! \geq 2^{k-1}$$

Puis que la suite (u_n) est majorée par 3.

- c. En déduire que la suite (u_n) converge.
2. Dans cette question, nous allons calculer la limite de la suite (u_n) .

Pour cela, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

- a. Calculer I_0 .
- b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{1-x} dx$$

En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

- c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

- d. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n + u_n = e$$

- e. En déduire que la suite (u_n) converge vers e .

Exercice 1 ROC (2 points)**Question de cours**

On sait que pour tout $t \in [a, b]$: $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$

En intégrant de a à b : $\int_a^b (u(t)v(t))' dt = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt$

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

D'où : $\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$

Application

Une primitive F de la fonction logarithme népérien est donnée, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt$$

On détermine ici LA primitive de la fonction logarithme qui s'annule en 1.

On pose : $u(t) = \ln t$

$$v'(t) = 1$$

$$u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v(t) = t \text{ (à une constante près)}$$

D'où : $F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1$

Exercice 2 QCM (4 points)

1. **Réponse K** $K = \int_0^1 (x+0,19) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 0,19x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 0,19 = 0,69$

Bien que ce ne soit pas nécessaire, détaillons le calcul des autres intégrales :

Remarquons que : $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx$

La fonction intégrée est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$.

Comme u est positive sur l'intervalle $[e; e^2]$, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est donc $\ln u$ d'où :

$$I = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln e) = \ln 2$$

Là encore, nous avons la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^x$ d'où :

$$J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^{\ln 3} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

La fonction L est en fait indépendante de sa variable x :

$$L(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$$

2. Réponse L

En effet, on repère de visu que les 3 premières intégrales sont nulles.

- I est l'intégrale d'une fonction périodique :

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$$

- J est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. En effet, posons :

$$f(x) = \frac{x \sin(x^2)}{1+x^2} \quad \text{pour } x \in [-1; 1]$$

L'intervalle $[-1; 1]$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de $[-1; 1]$, on a :

$$f(-x) = \frac{-x \sin(x^2)}{1+x^2} = -f(x)$$

D'où : $J = 0$

- Ceux qui se sont intéressés à la quadrature de la parabole auront vite repéré que K est nulle :

$$K = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]_0^1 = 0$$

- Enfin, bien que ce ne soit pas nécessaire, on peut calculer l'intégrale L par parties :

$$L = \int_{-1}^1 x e^x \, dx = [x e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x \, dx = [(x-1)e^x]_{-1}^1 = \frac{2}{e}$$

3. La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

Comme une exponentielle est positive sur \mathbb{R} , on en déduit :

F est croissante sur \mathbb{R}

Pour information : on ne peut pas exprimer la fonction F à l'aide des fonctions usuelles. Il s'agit de la fonction erf (de l'anglais "error function") de Gauss très utilisée en probabilité (loi normale).

4. Il s'agit du domaine délimité par la courbe de l'exponentielle, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 0$. (Le domaine n'est pas délimité sur le côté gauche).

On fixe donc un réel A négatif et on calcule l'intégrale :

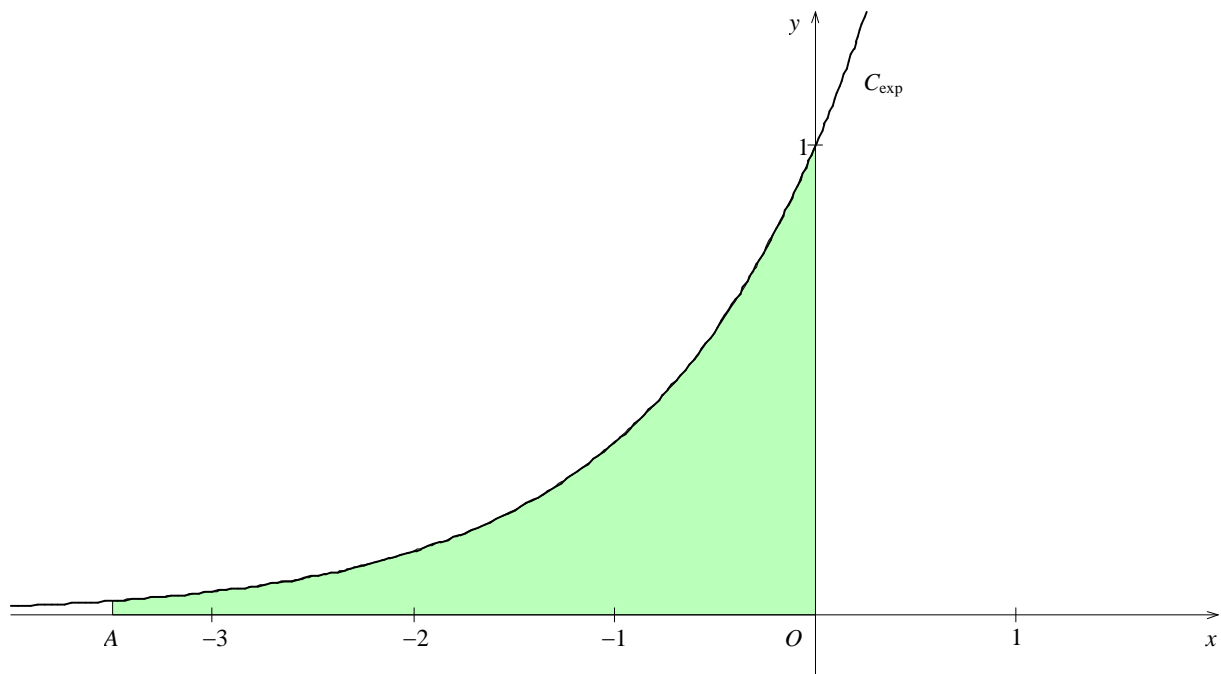
$$I(A) = \int_A^0 e^x \, dx = [e^x]_A^0 = 1 - e^A$$

Pour étudier l'aide du domaine D , il suffit d'étudier la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $-\infty$. Comme cette limite existe, le domaine a une aire finie (bien qu'il ne soit pas géométriquement borné) :

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} I(A) = 1$$

L'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$ est égale donc égale à :

1 u.a.



Remarque : on pouvait faire une estimation graphique pour pencher pour le réponse 1 u.a.

Exercice 3 (4 points)

On considère les intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

1. On a :

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \left[\ln(e^x + 4) \right]_0^{\ln 16} = \ln 20 - \ln 5 = \ln 4$$

$$I + J = \int_0^{\ln 16} 1 dx = \ln 16$$

2. Pour calculer I et J , on résout le système :

$$\begin{cases} I + J = \ln 16 \\ I - 3J = \ln 4 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$4J = \ln 16 - \ln 4 = \ln 4 = 2 \ln 2$$

$$J = \frac{\ln 2}{2}$$

D'où :

$$I = 2 \ln 2 + 3J = \frac{7 \ln 2}{2}$$

Exercice 4 (10 points)

1. a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b. On considère la propriété \wp définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\wp(k) : k! \geq 2^{k-1}$$

- On a $\wp(1)$ puisque : $1! \geq 2^0$
- Supposons $\wp(k)$ pour un certain entier $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$(k+1)! \geq (k+1)k! \stackrel{\wp(k)}{\geq} (k+1)2^{k-1} \stackrel{k+1 \geq 2}{\geq} 2^k$$

D'où $\wp(k+1)$

La propriété \wp est initialisée en 1 et héréditaire à partir du rang 1, donc d'après le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie à tous les rangs non nuls. On a donc bien, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k! \geq 2^{k-1}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$, il vient :

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

En sommant pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

Le membre de droite est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, il vaut donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 2$$

Et en ajoutant 1 :

$$u_n \leq 3$$

La suite (u_n) est donc bien majorée par 3.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

2. Dans cette question, nous allons calculer la limite de la suite (u_n) .

Pour cela, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

a. On a :

$$I_0 = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = \left[e^{1-x} \right]_1^0 = e - 1$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$0 \leq x^n \leq 1$$

En multipliant par $e^{1-x} \geq 0$: $0 \leq x^n e^{1-x} \leq e^{1-x}$

En intégrant pour x allant de 0 à 1 :

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 e^{1-x} dx$$

Et en divisant par $n!$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{1-x} dx$

C'est-à-dire : $0 \leq I_n \leq \frac{I_0}{n!}$

On en déduit, d'après le théorème de gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

c. On a : $(n+1)! I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$

Posons : $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{1-x}$
 $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -e^{1-x}$

Une intégration par parties donne :

$$(n+1)! I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$(n+1)! I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

Et en divisant par $(n+1)!$: $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

d. On considère la propriété \wp définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : I_n + u_n = e$$

- On a $\wp(0)$ puisque : $I_0 + u_0 = e - 1 + 1 = e$
- Supposons $\wp(n)$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$I_{n+1} + u_{n+1} \stackrel{2.c.}{=} I_n - \frac{1}{(n+1)!} + u_{n+1} = I_n + u_n \stackrel{\wp(n)}{=} e$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n + u_n = e$$

e. On a vu à la question 2.b. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et compte tenu du fait que $u_n = e - I_n$, nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$$

On a montré que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

Ce qu'on note encore :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$