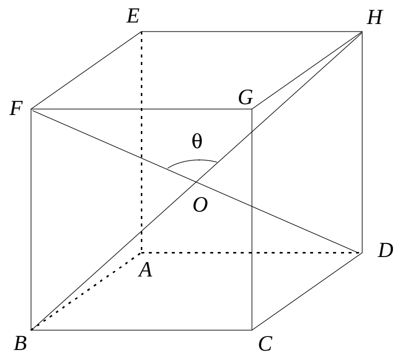
La calculatrice est autorisée. Les exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données.

Exercice 1 (3 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ de centre O et côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



1. Calculer les longueurs des grandes diagonales FD et BH.
2. Calculer une valeur approchée, au degré près, de l'angle $\theta = \widehat{FOH}$.
3. Démontrer que le plan (EGB) et la droite (FD) sont orthogonaux.
4. Donner une équation cartésienne du plan (EGB).
5. Calculer la distance entre le point O et le plan (EGB).

Rappel : la distance entre un point $M(x_M\ ;\ y_M\ ;\ z_M)$ et un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 2 (6 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2\mathbf{i}\ ;\ z_B = \mathbf{i}\ ;\ z_C = -1 + \mathbf{i}\ ;\ z_D = 1 + \mathbf{i}$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice (unités graphiques : 4 cm)

1. Soit f l'application de $\mathscr{P} \setminus \{B\}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où :

$$z' = \mathbf{i}\left(\frac{z - 2\mathbf{i}}{z - \mathbf{i}}\right)$$

   a. Développer la quantité : $(z + 1 - \mathbf{i})(z - 1 - \mathbf{i})$

   b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout z différent de $\mathbf{i}$:

$$|z'| = \frac{AM}{BM}$$

   Et que pour tout z différent de $\mathbf{i}$ et de $2\mathbf{i}$:

$$\arg(z') = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

   b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que :

$$|z'| = 1$$

   c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que :

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

3. a. Démontrer que pour tout z différent de $\mathbf{i}$:

$$z' - \mathbf{i} = \frac{1}{z - \mathbf{i}}$$

   En déduire : $|z' - \mathbf{i}| \times |z - \mathbf{i}| = 1$

   b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$.

   Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B dont on déterminera le rayon.

Exercice 3 **(4 points)** Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points R, A, I et E de coordonnées :

$$R(0\ ;\ 0\ ;\ 3)\ ;\ A\left(2\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ -1\right)\ ;\ I\left(-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{6}\ ;\ -1\right)\ ;\ E\left(-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{6}\ ;\ -1\right)$$

1. Les arêtes de $RAIE$ ont-elles toutes la même longueur ? (Autrement dit, $RAIE$ est-il un tétraèdre régulier ?)
2. On note M, N, P et Q les milieux respectifs des arêtes $[RI]$, $[RE]$, $[AE]$ et $[AI]$.
   Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.

PARTIE B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge. On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois sont visibles).

1. Quelle est la probabilité qu'aucune face rouge soit visible ?
2. Calculer la probabilité que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Soit E l'événement : "les six faces rouges sont visibles". Montrer que $P(E) = \dfrac{1}{8}$.
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé une et une seule fois.

Exercice 4 **(4 points)**

PARTIE A - Une inégalité

Démontrer que pour tout réel $x < 1$, on a : $\quad \mathbf{e}^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

(On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty\ ;\ 1[$ par $g(x) = (1 - x)\,\mathbf{e}^x - 1$)

Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on égalité ?

PARTIE B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 1[$ par :

$$f(x) = \mathbf{e}^x + \ln(1 - x)$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $]-\infty\ ;\ 1[$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en 1 (à gauche).
3. Étudier les variations de la fonction f. (On pourra utiliser les résultats de la partie A)
4. Tracer soigneusement la courbe représentative (C) de la fonction f.

Exercice 5 **(3 points)**

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

   a. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$:
   $$u_n = \binom{n}{2}$$
   b. Exprimer, en fonction de n, la somme : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

On rappelle que :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 1 (3 points)

1. Une simple application du théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en C donne :

$$BD = \sqrt{2}$$

Puis dans le triangle FBD rectangle en B :

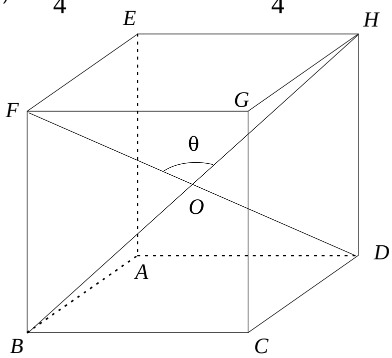
$$FD = \sqrt{3}$$

De même : $$BH = \sqrt{3}$$

2. On évalue le produit scalaire $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH}$ de deux manières différentes :

D'une part, en décomposant les vecteurs suivant des directions orthogonales :

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\, \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}\right) \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH}\right) = \frac{1}{4}(-DB^2 + BF^2) = -\frac{1}{4}$$



D'autre part, en utilisant la formule faisant intervenir le cosinus :

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = OF \times OH \times \cos(\theta)$$

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{3}{4}\cos(\theta)$$

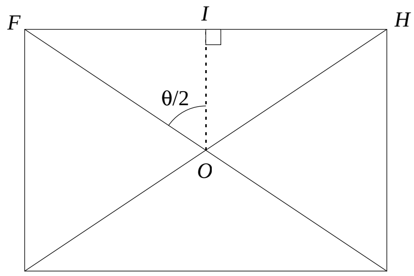
D'où : $$\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$$

La calculatrice donne : $\theta \simeq 109°$ (au degré près)

<u>Remarque</u> : on pouvait également calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH}$ à l'aide des coordonnées :

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

<u>Autre méthode</u> : on pouvait également raisonner de manière très élémentaire dans le plan (FOH) :



Notons I le milieu de $[FH]$. Le triangle FOH étant isocèle en O, la droite (OI) est donc perpendiculaire à la droite (FH). Les relations métriques dans le triangle rectangle permettent d'écrire :

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{OI}{OF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La calculatrice nous donne alors $\frac{\theta}{2}$ puis θ. De manière plus élégante, on peut aussi écrire :

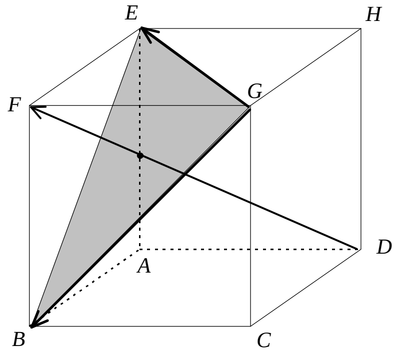
$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

3. Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (EGB) :

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{GE} = \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}\right) \cdot \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{GE}$$

$$\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{GE} = -FG^2 + GH^2 + 0 = 0$$

De même, on calcule : $\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{GB} = 0$



Remarquons que, là encore, on pouvait calculer ces produits scalaires à l'aide des coordonnées.

On en déduit que le plan (EGB) et la droite (FD) sont orthogonaux.

4. Puisque le vecteur $\overrightarrow{FD}$ $(-1 ; 1 ; -1)$ est normal au plan (EGB), son équation cartésienne est de la forme :

$$-x + y - z + d = 0$$

Et puisque le point $B(1 ; 0 ; 0)$ est situé dans ce plan :

$$d = 1$$

Une équation du plan (EGB) est : $-x + y - z + 1 = 0$

5. La distance entre le point $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et le plan (EGB) d'équation $-x + y - z + 1 = 0$ est :

$$d(O, (EGB)) = \frac{|-x_O + y_O - z_O + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

C'est à dire un sixième de la longueur d'une grande diagonale.

Exercice 2 (6 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2\mathbf{i} \;;\; z_B = \mathbf{i} \;;\; z_C = -1 + \mathbf{i} \;;\; z_D = 1 + \mathbf{i}$$

1. a. Développons :

$$\begin{aligned}(z + 1 - \mathbf{i})(z - 1 - \mathbf{i}) &= z^2 - z - \mathbf{i}z + z - 1 - \mathbf{i} - \mathbf{i}z + \mathbf{i} + \mathbf{i}^2 \\ &= z^2 - 2\mathbf{i}z - 2\end{aligned}$$

b. Les affixes z des point M tels que $f(M) = M$ vérifient :

$$z = \mathbf{i}\left(\frac{z - 2\mathbf{i}}{z - \mathbf{i}}\right)$$

$$z(z - \mathbf{i}) = \mathbf{i}(z - 2\mathbf{i})$$

$$z^2 - 2\mathbf{i}z - 2 = 0$$

Et d'après la question a. : $(z + 1 - \mathbf{i})(z - 1 - \mathbf{i}) = 0$

$$(z - z_C)(z - z_D) = 0$$

> Ne soyez pas surpris de ne pas trouver des solutions complexes conjuguées. L'équation du second degré résolue ici n'est pas à coefficients réels.

D'où : $z = z_C$ ou $z = z_D$

Exprimons ces deux solutions z_C et z_D sous forme trigonométrique :

$$z_C = -1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_D = 1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2. a. En passant aux modules dans la relation $z' = \mathbf{i}\left(\dfrac{z-2\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)$, on obtient, pour tout $z \neq \mathbf{i}$:

$$|z'| = |\mathbf{i}|\frac{|z-2\mathbf{i}|}{|z-\mathbf{i}|} = \frac{AM}{BM}$$

Et en passant aux arguments dans la même relation, on obtient pour tout $z \notin \{\mathbf{i}\ ;\ 2\mathbf{i}\}$:

$$\arg(z') = \arg(\mathbf{i}) + \arg\left(\frac{z-2\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)\ [2\pi]$$

$$\arg(z') = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

On rappelle que la quantité $\arg(z)$ n'a un sens que lorsque $z \neq 0$.

b. On a, pour tout $z \neq \mathbf{i}$, les équivalences suivantes :

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$$

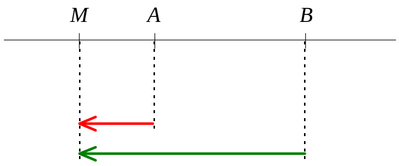
L'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que $|z'| = 1$ est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

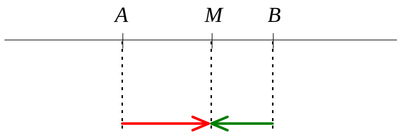
c. Remarquons tout d'abord que si $z = 2\mathbf{i}$ alors $z' = 0$ donc la condition $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ n'est pas satisfaite.

On suppose désormais que $z \notin \{\mathbf{i}\ ;\ 2\mathbf{i}\}$. On a, d'après la question 2.a. l'équivalence suivante :

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow B, M, A \text{ alignés avec } M \notin [AB]$$

(En effet, si $M \in\ ]AB[$ alors les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont de sens opposés et alors $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \pi\ [2\pi]$)





L'ensemble (F) recherché est donc la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

3. a. Pour tout z différent de $\mathbf{i}$:

$$z' - \mathbf{i} = \mathbf{i}\left(\frac{z-2\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right) - \mathbf{i} = \frac{\mathbf{i}z + 2 - \mathbf{i}z - 1}{z-\mathbf{i}} = \frac{1}{z-\mathbf{i}}$$

D'où : $(z' - \mathbf{i})(z - \mathbf{i}) = 1$

Et en passant aux modules : $|z' - \mathbf{i}| \times |z - \mathbf{i}| = 1$

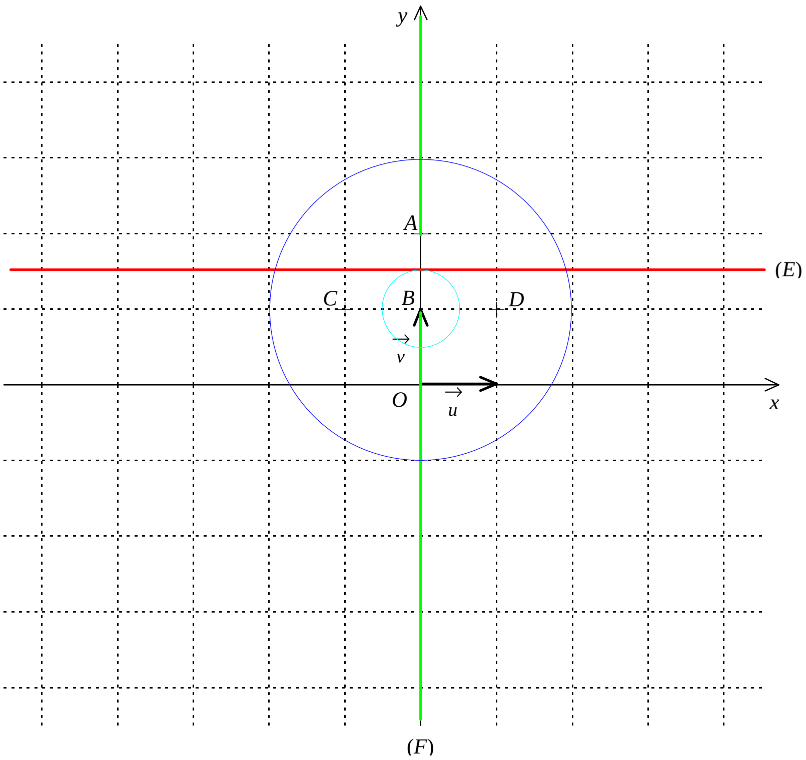
b. Par hypothèse, on a : $MB = \dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire : $|z - \mathbf{i}| = \dfrac{1}{2}$

D'après la question précédente, il vient : $|z' - \mathbf{i}| = 2$

C'est-à-dire : $M'B = 2$

Donc M' appartient au cercle de centre B de rayon 2.



Exercice 3 (4 points) Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points R, A, I et E de coordonnées :

$$R(0\,;0\,;3)\ ;\ A\left(2\sqrt{2}\,;0\,;-1\right)\ ;\ I\left(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1\right)\ ;E\left(-\sqrt{2}\,;\sqrt{6}\,;-1\right)$$

1. On calcule :

$$RA^2 = 8 + 16 = 24$$

$$RI^2 = 2 + 6 + 16 = 24$$

$$RE^2 = 2 + 6 + 16 = 24$$

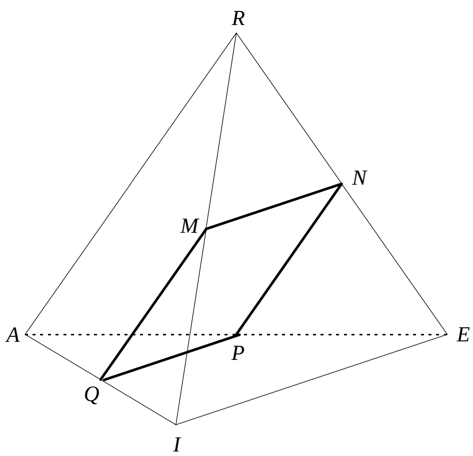
$$AI^2 = 18 + 6 = 24$$

$$AE^2 = 18 + 6 = 24$$

$$IE^2 = 24$$

Le tétraèdre $RAIE$ est donc régulier de côté $2\sqrt{6}$.

2.



D'après le théorème des milieux appliqué dans le triangle *RIE*, on a :

$$\overrightarrow{IE} = 2\,\overrightarrow{MN}$$

De même dans *AIE* : $$\overrightarrow{IE} = 2\,\overrightarrow{QP}$$

D'où : $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

Et par suite : *MNPQ* est un parallélogramme

On pouvait être encore plus efficace en montrant que [*MP*] et [*NQ*] ont même milieu *O* ce qui prouve directement que *MNPQ* est un parallélogramme de centre *O*.

Montrons que son centre est *O* à l'aide des coordonnées :

$$M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;1\right)\ ;\ P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{6}}{2}\,;-1\right)$$

Le milieu de la diagonale [*MP*] est bien *O*.

Donc *MNPQ* est un parallélogramme de centre *O*.

3. Puisque le tétraèdre est régulier, on a :

$$MQ = \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}IE = QP$$

Notre parallélogramme a ses côtés consécutifs d'égales longueurs, c'est donc un losange.

De plus, dans un tétraèdre régulier, les arêtes opposées sont orthogonales. En effet, on a par exemple :

$$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{IE} = \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IR}\right)\cdot\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IR}\cdot\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IR}\cdot\overrightarrow{IM} = -\frac{1}{2}AI^2 + \frac{1}{2}IR^2 = 0$$

On en déduit : $$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{IE} = 0$$

Notre losange a ses côtés consécutifs perpendiculaires, c'est donc un **carré**.

PARTIE B

1. Il y a toujours au moins une face rouge de visible sur chaque tétraèdre.

   La probabilité qu'aucune face rouge soit visible est donc nulle.

2. Étant donné un tétraèdre, la probabilité que la face bleue ne soit pas visible est $\frac{1}{4}$.

   La probabilité que la face bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre est donc :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

3. Étant donné un tétraèdre, la probabilité que les deux faces rouges soient visible est $\frac{1}{2}$.

   La probabilité que les deux faces rouges soient visibles sur chacun des trois tétraèdres est donc :

$$P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Les deux résultats ci-contre s'illustrent facilement avec des arbres.

4. Soit *X* la variable aléatoire égale au nombre d'occurrence de l'événement *E* lorsqu'on répète *n* fois l'expérience qui consiste à lancer trois tétraèdres.

   La variable aléatoire *X* est donc binomiale de paramètres *n* et $p = P(E) = \frac{1}{8}$.

   On a donc : $$p_n = P(X=1) = \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1} = n\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$$

<u>Exercice 4</u> (4 points)

PARTIE A - Une inégalité

La fonction g est de la forme :

$$g = uv - 1 \qquad \text{avec } \begin{cases} u(x) = 1 - x \\ v(x) = \mathbf{e}^x \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant dérivable sur $]-\infty\,;1[$ (et même sur $\mathbb{R}$), la fonction g l'est aussi et on a :

$$g' = u'v + uv' - 0$$

Ce qui donne : $$g'(x) = -\,\mathbf{e}^x + (1 - x)\,\mathbf{e}^x = -x\,\mathbf{e}^x$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, on a :

$$g'(x) \geqslant 0 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$$

On en déduit les variations (puis le signe) de g :

x	$-\infty$		0		1
Signe de g'		$+$	0	$-$	
Variations de la fonction g	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1
Signe de g		$-$	0	$-$	

Comme g est négative sur $]-\infty\,;1[$ on a :

$$(1 - x)\,\mathbf{e}^x - 1 \leqslant 0$$

$$(1 - x)\,\mathbf{e}^x \leqslant 1$$

Et comme $1 - x > 0$: $$\mathbf{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

Enfin l'égalité a lieu si et seulement si g est nulle, c'est à dire pour $x = 0$:

$$\mathbf{e}^x = \frac{1}{1-x} \iff g(x) = 0 \iff x = 0$$

PARTIE B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[$ par :

$$f(x) = \mathbf{e}^x + \ln(1 - x)$$

1. La fonction f est définie pour des valeurs x telles que :

$$1 - x > 0$$

$$x < 1$$

$$x \in\ ]-\infty\,;1[$$

2. On a : $$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \ln(1 - x) = +\infty$$

   Donc, par somme : $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

   On a : $$\lim_{x\to1^-} \mathbf{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1^-} \ln(1 - x) = -\infty$$

Donc, par somme : $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

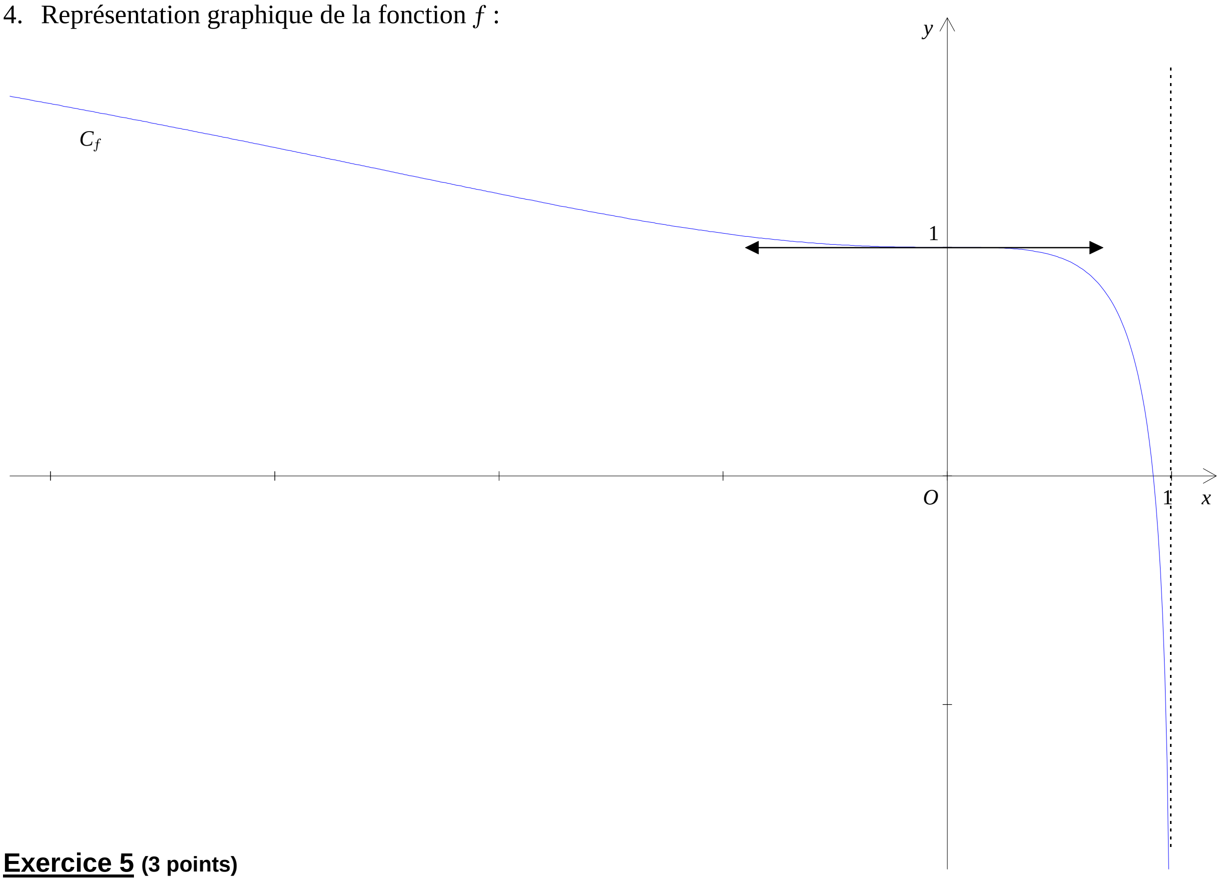
3. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = \mathbf{e}^x - \frac{1}{1-x}$$

Et d'après la partie A : $$f'(x) \leqslant 0$$

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;1[$.

4. Représentation graphique de la fonction f :



Exercice 5 (3 points)

1. On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n)\ :\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^2 = \dfrac{1\times 2\times 3}{6}$.
- Montrons que la propriété $\wp$ est héréditaire (c'est-à-dire, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$).

Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Et d'après $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

En factorisant par $(n+1)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\left[(n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 1$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : la propriété $\wp$ est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1 donc elle est vraie à tout rang n supérieur à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

a. On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \geqslant 2$ par :

$$\wp(n) : u_n = \binom{n}{2}$$

- On a $\wp(2)$ puisque $u_2 = u_1 + 1 = u_0 + 1 = 1 = \binom{2}{2}$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 2$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\wp(n)$ $\quad u_n = \binom{n}{2}$

On a : $\quad u_{n+1} = u_n + n = \binom{n}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

Variante en utilisant la relation de Pascal :

$\binom{n}{2} + n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 2$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(2)$ et (pour tout $n \geqslant 2$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = \binom{n}{2}$$

b. Exprimons, en fonction de n, la somme S_n. Comme $u_0 = u_1 = 0$, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

Et d'après la question 1 :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{12} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{12} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

<u>Remarque</u> : comme $\frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \binom{n+1}{3}$, on a montré en fait que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$