

Exercice 1

a : V b : V c : V d : V

a. On a :

$$b - a = 4 + 2i = c - d$$

D'où :

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$ABCD$ est un parallélogramme

b. L'affixe e se calcule avec la relation : $e - b = -i(c - b)$

$$e = -i(c - b) + b = -i \times 4i + 2 = 6$$

Le point E est sur l'axe des abscisses

c. On vérifie facilement que :

$$f - d = i(c - d)$$

Autrement dit :

F est l'image de C par le quart de tour direct de centre D

CDF est rectangle isocèle en D .

d. Idem avec :

$$c - d = i(g - d)$$

Exercice 2

a : V b : F c : V d : V

a. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1 + 2i)^5 = 1 + 5 \times 2i + 10 \times (2i)^2 + 10 \times (2i)^3 + 5 \times (2i)^4 + (2i)^5 = 1 + 10i - 40 - 80i + 80 + 32i = 41 - 38i$$

$$\operatorname{Re}\left((1 + 2i)^5\right) = 41$$

b. Le rapport d'une homothétie est toujours un réel non nul, ça ne peut pas être i .

La relation $b - c = i(a - c)$ traduit le fait que B est l'image de A par le quart de tour direct de centre C .

c. En remarquant que $(1 + i)^2 = 2i$, on a :

$$(1 + i)^{20} = (2i)^{10} = -1024$$

$$(1 + i)^{20} \text{ est bien un réel}$$

d. On factorise :

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$$

L'équation possède bien quatre solutions distinctes dans \mathbb{C} : 1 ; -1 ; i ; $-i$

Exercice 3

a : F b : F c : V d : V

Dans cet exercice, il est très utile de remarquer que :

$$Z = \frac{z - a}{z - b}$$

a. Comme $z \neq b$, on a $M \neq B$ donc l'ensemble recherché ne risque pas d'être le segment $[AB]$.

Pour ceux qui l'ont cherché, déterminons-le.

Un nombre complexe est réel si et seulement si il est nul ou son argument est congru à 0 modulo π :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 \text{ } [\pi])$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = a \text{ ou } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0 \text{ } [\pi])$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (M = A \text{ ou } (\overline{BM}, \overline{AM}) = 0 \text{ } [\pi])$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (M = A \text{ ou } M \in (AB) \setminus \{A; B\})$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel est la droite (AB) privée du point B

b. Non, car le conjugué de $z + 3 - 2i$ est $\bar{z} + 3 + 2i$ et non $z + 3 + 2i$.

c. Les assertions suivantes sont équivalentes :

M' est un point de l'axe des ordonnées

Z est un imaginaire pur

$$Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$$

$$z = a \text{ ou } (\overline{BM}, \overline{AM}) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$$

$M = A$ ou M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B

M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B

On montre facilement que le cercle de diamètre $[AB]$ a bien pour équation $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

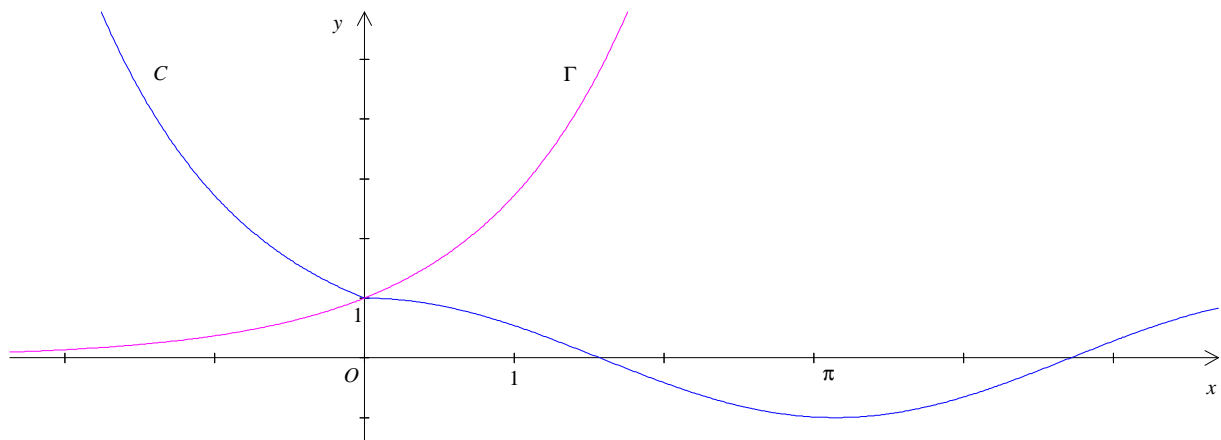
d. On a donc : $\frac{z_0 - a}{z_0 - b} = i$

En passant aux modules : $AM_0 = BM_0$

Le point M_0 appartient bien à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 4

a : F b : V c : F d : V



- a. Non, par contre, la partie de C située dans le demi-plan dont les points ont des abscisses négatives est l'image par une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées de la partie de Γ située dans le demi-plan dont les points ont des abscisses positives.
- b. On compare les limites à gauche et à droite de f en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{-x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \cos 0 = 1$$

Ces deux limites sont égales à $f(0) = \cos 0 = 1$, donc f est continue en 0.

- c. Le graphique permet de conjecturer que les demi-tangentes à C à gauche et à droite en 0 sont différentes, ce que confirme le calcul suivant :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{e^{-h} - 1}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} -\frac{e^h - 1}{h} = -1$$

Donc la fonction f est dérivable en 0, à gauche et admet une demi-tangente de coefficient directeur -1 .

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Donc la fonction f est dérivable en 0, à droite et admet une demi-tangente horizontale.

Comme les limites de l'accroissement moyen à gauche et à droite sont différentes, la fonction f n'est pas dérivable en 0.

- d. La fonction f est continue sur $]-\infty, \pi]$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, \pi]$.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{et} \quad f(\pi) = \cos \pi = -1$$

Du théorème de bijection, on déduit l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-\infty, \pi]$.

Exercice 5

a : F b : V c : F d : V

- a. On sait que deux primitives diffèrent d'une constante. Or, parmi les trois courbes, ce sont C_1 et C_2 qui se correspondent par une translation. En conséquence, f_1 et f_2 sont des primitives de f_3 .
- b. Puisque f_1 est une primitive de f_3 , f_3 est la dérivée de f_1 .
- c. La surface en question a pour aire :

$$\int_{-1}^0 f_3(x) dx = [f_2(x)]_{-1}^0 = f_2(0) - f_2(-1) = -f_2(-1) \quad \text{et non} \quad f_2(-1)$$

- d. On vu que C_1 et C_2 se correspondent par une translation (de vecteur $k \vec{j}$) :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = k \vec{j}$$

On en déduit que la distance $M_1 M_2$ est constante égale à k .

Exercice 6

a : V b : F c : F d : V

- a. Puisque la fonction f est positive sur $[-1 ; 6]$, toute primitive de f est croissante sur $[-1 ; 6]$.
- b. La courbe C_2 représentant la fonction f' n'admet pas de tangente horizontale en 0. Donc $f''(0) \neq 0$. La courbe représentant f'' ne peut donc pas passer par l'origine.
- c. La fonction f'' s'annule autant de fois que la courbe de f' admet de tangentes horizontales, donc deux fois.
- d. L'aire de la surface en question est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = f(1) = 1 \text{ u.a.}$$

Exercice 7

a : V b : V c : V d : V

- a. La fonction f est de la forme : $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sin(\ln x) - \cos(\ln x) \end{cases}$

Comme les fonctions u et v sont dérivables sur $]0, +\infty[$ (v l'est comme différence de fonctions composées qui le sont), la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$f' = u'v + uv'$$

D'où, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \sin(\ln x) - \cos(\ln x) + x \left(\frac{\cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x} \right)$$

$(\sin(\ln x))' = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$
--

$$f'(x) = 2\sin(\ln x)$$

- b. Posons : $A = 7 \ln(\sqrt{2} + 1) + 2 \ln(3 + \sqrt{2}) - \ln(11 + 6\sqrt{2}) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1)$

Procédons en deux étapes :

$$7 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1) = 7 \ln[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)] = 7 \ln 1 = 0$$

Par ailleurs : $2 \ln(3 + \sqrt{2}) = \ln[(3 + \sqrt{2})^2] = \ln(11 + 6\sqrt{2})$

Finalement, on obtient bien : $A = 0$

- c. La fonction tangente est de la forme : $\tan = -\frac{u'}{u}$ où $u = \cos$

Une primitive de la fonction tangente sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ est donc $x \mapsto -\ln(\cos x)$. On en déduit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\cos 0) - \ln\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

- d. Posons : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ainsi : $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$

Une intégration par parties donne :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x} \ln x]_1^e - 2 \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{e} - 4[\sqrt{x}]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$$

Exercice 8

a : V b : F c : F d : F

a. Montrons que l'image de \mathbb{R} , par f , est bien $]0 ; 1]$.

$$\text{Soit } y \in]0 ; 1] \text{ et considérons l'équation : } y = \frac{1}{1+x^2}$$
$$y + yx^2 = 1$$

$$\text{Comme } y \neq 0 : x^2 = \frac{1-y}{y}$$

Et comme $\frac{1-y}{y} > 0$ (car $0 < y \leq 1$), notre équation admet deux solutions dans \mathbb{R} (ou une seule si $y = 1$)

Tout élément y de $]0 ; 1]$ admet donc au moins un antécédant x dans \mathbb{R} .

Donc l'image de \mathbb{R} , par f , est bien $]0 ; 1]$.

b. Si $x \in]0 ; 1[$ alors $x^2 - x$ est strictement négatif.

L'inégalité $0 \leq g(x) \leq x^2 - x$ ne peut pas être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$...

Ceci dit, cet encadrement est valable pour $x \in D$ où $D =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$.

D'après la question a., la fonction f est strictement positive et majorée par 1 sur \mathbb{R} :

$$\text{pour tout réel } t : 0 < f(t) \leq 1$$

Soit $x \in D$. Alors $x \leq x^2$. En intégrant l'encadrement ci-dessus entre x et x^2 , on obtient :

$$0 < \int_x^{x^2} f(t) dt \leq x^2 - x$$

$$\text{D'où, pour tout réel } x \in D : 0 \leq g(x) \leq x^2 - x$$

c. Même problème qu'en b. Pour que l'intégrale entre a et b d'une fonction positive représente une aire, il est nécessaire que les bornes a et b vérifient $a \leq b$. Le résultat n'est valable que pour $x_0 \in D$; si $x_0 \in]0 ; 1[$, alors $g(x_0)$ représente l'opposé de l'aire décrite dans l'énoncé.

d. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Nous savons que pour tout réel x , F est définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

D'après la relation de Chasles, nous pouvons exprimer g à l'aide de F :

$$g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(x)$$

Et d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée :

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$$

Exercice 9

a : F b : V c : F d : V

- a. Considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{1}{n+1}$

Cette suite est à termes strictement positifs et pourtant converge vers une limite ℓ nulle.

- b. Par définition de la convergence d'une suite (u_n) vers un réel ℓ :

pour tout intervalle I du type $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$, il existe un rang N à partir duquel $u_n \in I$ ($n \geq N$)

Ici, il suffit de choisir $\varepsilon = 10^{-3}$. Il existe donc un rang N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait :

$$|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$$

À partir d'un certain rang, ℓ est bien une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.

- c. Le même contre-exemple qu'en a. montre que la suite $(\ln u_n)$ diverge vers $-\infty$.
d. On raisonne par récurrence avec la propriété :

$$\wp(n) : u_n > u_{n+1}$$

Comme par hypothèse, on a $u_0 > u_1$, on a $\wp(0)$. (La propriété est donc initialisée en 0)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n) :$ $u_n > u_{n+1}$

Par stricte croissance du logarithme : $\ln(u_n) > \ln(u_{n+1})$

$$u_{n+1} > u_{n+2}$$

D'où $\wp(n+1)$

La propriété \wp est donc héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . En conséquence la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 10

a : F b : V c : V d : V

- a. En utilisant la forme exponentielle, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|z_{n+1}| = \left| \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \right| |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$$

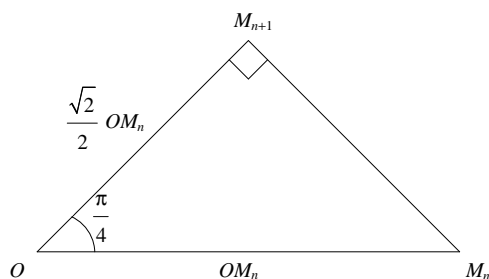
La suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- b. Pour tout entier naturel n , on a :

$$z_n - z_{n+1} = (1 - \mathbf{i})z_{n+1} - z_{n+1} = \mathbf{i}(0 - z_{n+1})$$

Ce qui prouve que M_n est l'image de O par le quart de tour direct de centre M_{n+1} .

Donc, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles isocèles en M_{n+1} .



c. Pour tout entier naturel n , on a : $\arg(z_{n+1}) = \frac{\pi}{4} + \arg(z_n) [2\pi]$

La suite $(\arg(z_n))$ est donc arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. Et comme $\arg(z_0) = 0$, on a :

$$\arg(z_n) = n \times \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

En conséquence :

$$\arg(z_n) = 0 [\pi] \Leftrightarrow n \times \frac{\pi}{4} = 0 [\pi] \Leftrightarrow n = 0 [4] \Leftrightarrow n \text{ est un multiple de } 4$$

d. Pour tout entier naturel n , on a : $z_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z_n$

La suite (z_n) est donc géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Et comme $z_0 = 1$, on a :

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n = \frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$$

Exercice 11

a : V b : F c : V d : V

Remarquons que $I(3 ; 1)$ étant le milieu de $[AB]$, on a :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_{n+1} \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline G_n & A & B \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline G_n & I \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Donc G_{n+1} est le milieu du segment $[IG_n]$.

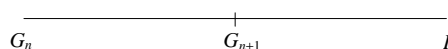
a. G_1 est un barycentre de $G_0 = O$ et de I donc est situé sur la droite (OI) .

G_2 est un barycentre de G_1 et de I donc appartient aussi à la droite (OI)

De même pour G_3 .

On peut démontrer par récurrence qu'il en est de même pour tous les points G_n .

b. On a vu que G_{n+1} est le milieu de $[IG_n]$:



Par conséquent G_{n+1} est l'image de G_n par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.

c. On a, pour tout entier n :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n}{2} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2} \quad (E_1)$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 (suite arithmético-géométrique)

On recherche ω tel que :

$$\omega = \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{2} \quad (E_2)$$

On trouve :

$$\omega = 3$$

En retranchant membre à membre (E_2) de (E_1), on obtient :

$$x_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(x_n - 3)$$

La suite (u_n) définie par $u_n = x_n - 3$ est bien géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{2}$.

d. On a donc :

$$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$x_n = 3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Remarque : on démontre facilement que la suite de points (G_n) converge vers I .

Exercice 12

a : V b : V c : V d : F

On a, $g_0 = 0$, $h_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$g_{n+1} = \frac{2g_n + 3h_n}{5} \quad \text{et} \quad h_{n+1} = \frac{3g_n + 2h_n}{5}$$

a. Pour tout entier naturel n :

$$g_{n+1} - h_{n+1} = \frac{-g_n + h_n}{5} = -\frac{1}{5}(g_n - h_n)$$

La suite $(g_n - h_n)$ est bien géométrique de raison $-\frac{1}{5}$.

b. Pour tout entier naturel n :

$$g_{n+1} + h_{n+1} = \frac{5g_n + 5h_n}{5} = g_n + h_n$$

La suite $(g_n + h_n)$ est bien constante égale à $g_0 + h_0 = 1$

c. Puisque la suite $(g_n - h_n)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $g_0 - h_0 = -1$, on a :

$$g_n - h_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Par ailleurs, on a vu que :

$$g_n + h_n = 1$$

En additionnant membre à membre :

$$2g_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1$$

Or, $-\frac{1}{5} \in]-1; 1[$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \frac{1}{2}$$

En retranchant membre à membre :

$$2h_n = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \frac{1}{2}$$

Les suites (g_n) et (h_n) ont la même limite $\frac{1}{2}$.

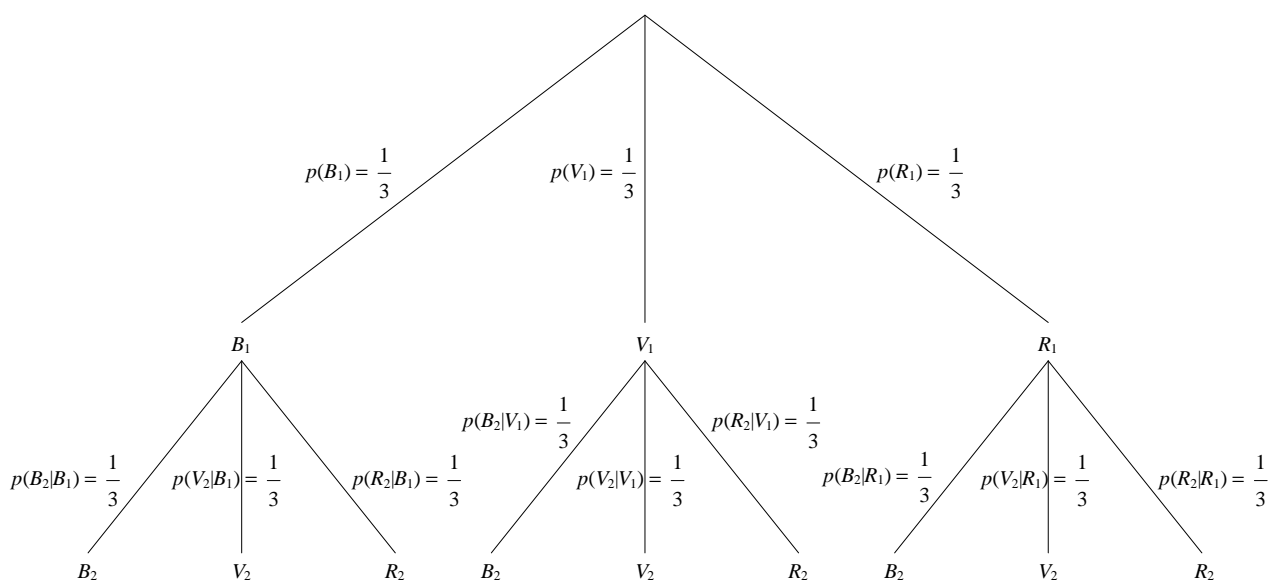
d. Les suites (g_n) et (h_n) ne sont pas adjacentes car non monotones. En effet, on a :

$$g_0 = 0 ; g_1 = \frac{3}{5} \text{ et } g_2 = \frac{2g_1 + 3h_1}{5} = \frac{2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{2}{5}}{5} = \frac{12}{25}$$

$$g_0 < g_1 \text{ et } g_1 > g_2$$

Exercice 13

a : F b : V c : V d : F



a. On a, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(B_1 \cap \overline{B_2}) = p_{B_1}(\overline{B_2}) \times p(B_1) = (1 - p_{B_1}(B_2)) \times p(B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

De même :

$$p(V_1 \cap \overline{V_2}) = p(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{2}{9}$$

Donc :

$$p(B_1 \cap \overline{B_2}) + p(V_1 \cap \overline{V_2}) + p(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{2}{3} \neq 1$$

b. D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $B_1 \cup V_1 \cup R_1$:

$$p(A_2) = p(A_2 \cap B_1) + p(A_2 \cap V_1) + p(A_2 \cap R_1)$$

$$p(A_2) = p(B_1 \cap \overline{B_2}) + p(V_1 \cap \overline{V_2}) + p(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{2}{3}$$

c. Pour une couleur donnée, la probabilité d'obtenir $n - 1$ tirages de cette couleur et un $n^{\text{ème}}$ tirage d'une couleur différente est :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3}$$

(formule de répétition d'événements indépendants)

Et comme il y a trois choix possibles de couleur pour les $n - 1$ premiers tirages :

$$p(A_n) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

d. La suite $(p(A_n))$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc :

$$\sum_{k=2}^n p(A_k) = \frac{p(A_2) \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^{n-1}}$$

Et comme $\frac{1}{3} \in]-1 ; 1[$, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n p(A_k) = 1$

Exercice 14

a : F b : V c : F d : V

Cet énoncé n'est pas clair. Que signifie la phrase :

"la durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre λ " ?

Si chaque moteur dure exactement 5 ans, l'affaire est vite réglée et il n'y a pas à épiloguer.

Je pense plutôt que ces 5 ans désignent la durée de vie **moyenne** d'un moteur...

a. Calculons :

$$\int_0^5 f(t) dt = \left[-e^{-5t}\right]_0^5 = 1 - e^{-25} \neq 1$$

La fonction f proposée n'est même pas une densité de probabilité.

En fait, on peut démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'espérance d'une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Le paramètre λ serait donc égal à : $\lambda = \frac{1}{5}$

La densité de probabilité f est alors définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- b. Soit g la durée de la garantie. Calculons la probabilité qu'un client soit dépanné avant g années, c'est-à-dire la probabilité que la durée de vie T du moteur n'excède pas g :

$$P(T \leq g) = \int_0^g \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t} dt = \left[-e^{-\frac{1}{5}t} \right]_0^g = 1 - e^{-\frac{g}{5}}$$

On dispose de l'information : $P(T \leq g) = 0,5$

C'est-à-dire : $1 - e^{-\frac{g}{5}} = 0,5$

$$e^{-\frac{g}{5}} = 0,5$$

$$g = 5 \ln 2$$

Et comme $\ln 2 \simeq 0,7$: $g \simeq 3,5$

La durée de la garantie est bien de 3,5 ans environ.

- c. Par "panne", il faut entendre "panne fatale" !

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = p(T \geq 2) = e^{-\frac{2}{5}}$.

On a :
$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{5}}\right)^{10}$$

- d. L'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$\mathbb{E}(X) = np = 10e^{-\frac{2}{5}}$$

Exercice 15

a : V b : F c : V d : F

- a. Soit P le plan d'équation $2x - 2y + 3z - 1 = 0$.

On vérifie facilement que les points $I(0,5 ; 0 ; 0)$, $J(1 ; 0,5 ; 0)$ et $F(0 ; 1 ; 1)$ sont dans P .

Par ailleurs, les points I , J et F ne sont pas alignés, il passe donc un unique plan par ces trois points, ce plan est donc P .

- b. Le point D , qui est un point de Δ , a pour coordonnées $D(0 ; 1 ; 0)$.

Or, il n'existe pas de réel k tel que

$$\begin{cases} 0 = 1 + k \\ 1 = 1 - k \\ 0 = \frac{3}{2}k \end{cases}$$

Pour ceux qui l'ont cherché, donnons un système de représentation paramétrique de Δ .

Un vecteur normal au plan (IJF) est ; $\vec{n}(2; -2; 3)$

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. On a :

$$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overline{DM} = \lambda \vec{n}$$

Or :

$$\overline{DM} = \begin{vmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{vmatrix}$$

Un système de représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

c. Soit K le milieu de $[AE]$ (et donc le centre du carré $ABED$) et H le centre de gravité de ABE .

On a ainsi :

$$\begin{array}{|c|} \hline G_3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & E & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline H & D \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Donc G_3 est le milieu de $[HD]$ et comme H est un point de $[BD]$:

$$G_3 \in [BD]$$

d. On réduit la somme vectorielle à l'aide du barycentre G_n :

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + n\overline{MD} = (n+3) \overline{MG_n}$$

L'ensemble des points M tels que $\|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + n\overline{MD}\| = (n+3)$ est donc aussi caractérisé par :

$$\|\overline{MG_n}\| = 1$$

C'est donc le cercle de centre G_n et de rayon 1.

Exercice 16

a : V b : V c : V d : F

a. Soit P le plan d'équation $y = -x + 1$.

On vérifie facilement que les points $D(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ et $H(0; 1; 1)$ sont dans P .

Par ailleurs, les points D , B et H ne sont pas alignés, il passe donc un unique plan par ces trois points, ce plan est donc P .

b. Soit Q le plan d'équation $2x - y - z = 0$.

On vérifie facilement que les points $A(0; 0; 0)$, $I(0,5; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$ sont dans Q .

Par ailleurs, les points A , I et G ne sont pas alignés, il passe donc un unique plan par ces trois points, ce plan est donc Q .

c. Un vecteur normal au plan (AIG) est :

$$\vec{n}(2; -1; -1)$$

On a $B(1; 0; 0)$ et $J(0; 0,5; 0,5)$ d'où : $\overline{BJ}(-1; 0,5; 0,5)$

On constate que : $\vec{n} = -2\overline{BJ}$

Donc \overline{BJ} est aussi un vecteur normal au plan (AIG) .

d. Cette distance ne peut pas être supérieure à $\sqrt{3}$ (grande diagonale du cube)...

La distance d entre le point $B(1 ; 0 ; 0)$ et le plan (AIG) d'équation $2x - y - z = 0$ est donnée par :

$$d = \frac{|2x_B + y_B - z_B|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$