PROJET SUJET BAC S

Exercice 1

1. Résoudre, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système : $(S) \begin{cases} x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{2} \\ x^2 y^2 = 2 \end{cases}$

2. Soit $Z = 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{8}}$.

   a) Vérifier que : $Z^2 = 2\sqrt{2}\,(1 + \mathbf{i})$

   b) Soit $x = \mathrm{Re}(Z)$ et $y = \mathrm{Im}(Z)$. Ainsi, $Z = x + \mathbf{i}y$.

      i) Justifier que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

      ii) Vérifier que $Z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy$.

      iii) Justifier que le couple $(x\,;\,y)$ est solution du système (S).

   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

3) a) En utilisant les formules d'Euler, démontrer que pour tout réel θ, on a :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

   b) En particularisant convenablement θ, retrouver le résultat de la question 2. c).

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathbf{e}^{-x}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{\mathbf{e}}$

3. En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{n!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right)\right]$$

4. Démontrer que : $\mathbf{e} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}$

Problème

Partie *A* *Étude d'une fonction g*

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathbf{e}^x (x-1)+1$

1) Calculer la dérivée g' de la fonction g et en déduire les variations de la fonction g.

2) Démontrer que $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Partie *B* *Calcul et encadrement d'une intégrale pour la détermination d'une limite*

On considère la fonction intégrale I définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$I(x) = \int_0^x (x-t)\mathbf{e}^t \, \mathrm{d}t$$

1) En intégrant par parties, démontrer que : $I(x) = \mathbf{e}^x - (1+x)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout $t \in [0 ; x]$, on a : $1 \leqslant \mathbf{e}^t \leqslant \mathbf{e}^x$. En déduire l'encadrement :

$$\frac{x^2}{2} \leqslant I(x) \leqslant \frac{x^2\mathbf{e}^x}{2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^-$. Démontrer que pour tout $t \in [x ; 0]$, on a : $\mathbf{e}^x \leqslant \mathbf{e}^t \leqslant 1$. En déduire l'encadrement :

$$\frac{x^2\mathbf{e}^x}{2} \leqslant I(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^-.$$

4) En déduire que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Partie *C* *Étude d'une fonction f*

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{x}$

On note C_f sa courbe représentative.

1) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.

2) Démontrer que f se prolonge par continuité en 0 par une fonction que l'on notera encore f. Que vaut $f(0)$?

3) Étudier la dérivabilité de f en 0. (On pourra utiliser la question 4 de la partie B)

4) Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe. (On pourra utiliser la question 2 de la partie A)

5) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

6) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

7) Tracer, dans un repère orthonormal la droite T puis la courbe C_f de la fonction f.

Solution du sujet de BAC S

Exercice 1

1. Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$. Les deux équations de (S) s'écrivent ainsi :

$$(E_1) : X - Y = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad (E_2) : XY = 2.$$

Procédons par substitution :

Avec (E_1), exprimons Y en fonction de X : $\quad Y = X - 2\sqrt{2}$.

En remplaçant dans (E_2) : $\quad (X - 2\sqrt{2})\, X = 2$

On obtient ainsi l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - 2\sqrt{2}\, X - 2 = 0$$

Son discriminant Δ est égal à 16 d'où : $\quad X = \sqrt{2} + 2$ ou $X = \sqrt{2} - 2$.

Mais comme $X \geqslant 0$ (puisque $X = x^2$), on a : $X = 2 + \sqrt{2}$. D'où $Y = 2 - \sqrt{2}$

Tenant compte des relations $X = x^2$ et $Y = y^2$ et des conditions $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on déduit :

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Le système (S) admet donc un unique couple solution : $S = \{(\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{2-\sqrt{2}})\}$

2. $Z = 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{8}} = 2(\cos\frac{\pi}{8} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{8})$

a) $Z^2 = 4\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = 4\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbf{i}) = 2\sqrt{2}\,(1+\mathbf{i})$.

b) On a donc : $\quad x = \mathrm{Re}(Z) = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $y = \mathrm{Im}(z) = 2\sin\frac{\pi}{8}$

i) Comme $\frac{\pi}{8} \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} \geqslant 0$. Donc $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

ii) $Z^2 = (x + \mathbf{i}y)^2 = x^2 + 2\mathbf{i}xy + (\mathbf{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy$.

iii) D'après 2)a) et 2)b)ii), on a : $x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy = 2\sqrt{2}\,(1+\mathbf{i})$.

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales : $a + b\mathbf{i} = a' + b'\mathbf{i} \iff a = a'$ et $b = b'$. D'où :

$$x^2 - y^2 = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad 2xy = 2\sqrt{2}$$

C'est-à-dire : $\quad x^2 - y^2 = 2\sqrt{2} \quad$ et $\quad x^2 y^2 = 2$

Et comme, d'après 2)b)ii), $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on peut affirmer que :

le couple (x ; y) est solution du système (S).

c) D'après la question 1), on a : $\quad x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

D'après la question 2), on a : $\quad x = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $y = 2\sin\frac{\pi}{8}$

D'où : $$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

3) a) D'après les formules d'Euler, on a :

$$\cos^2\theta = \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+2}{4} = \frac{2\cos(2\theta)+2}{4} = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2\theta = \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^2 = \frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}-2}{-4} = \frac{2\cos(2\theta)-2}{-4} = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

b) En particularisant $\theta = \frac{\pi}{8}$, on obtient :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, on obtient : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

De même :

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on obtient : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \mathbf{e}^{-x}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a : $0 \leqslant \mathbf{e}^{-x} \leqslant 1$. D'où : $0 \leqslant \mathbf{e}^{-x} x^n \leqslant x^n$.

   En intégrant sur $[0\,;1]$, on obtient : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

   D'après le théorème des gendarmes, on déduit que I_n admet une limite en $+\infty$ et : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \mathbf{e}^{-x}$. Une intégration par parties donne :

$$I_n = \left[-x^n\mathbf{e}^{-x}\right]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}\mathbf{e}^{-x}\,\mathrm{d}t = -\mathbf{e}^{-1} + nI_{n-1} = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathbf{e}}$$

3. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété : $\wp(n) : I_n = \frac{n!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right)\right]$

   On a : $I_0 = \int_0^1 \mathbf{e}^{-x}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathbf{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathbf{e}^{-1} + 1 = \frac{1}{\mathbf{e}}(\mathbf{e}-1)$ d'où $\wp(0)$.

   Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\wp(n-1) \Rightarrow \wp(n)$

   Supposons $\wp(n-1)$, c'est-à-dire : $I_{n-1} = \frac{(n-1)!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\right)\right]$

   On a : $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathbf{e}} = n\frac{(n-1)!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\right)\right] - \frac{1}{\mathbf{e}} = \frac{n!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\right) - \frac{1}{n!}\right] = \frac{n!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right)\right]$

   D'où $\wp(n)$.

   On en déduit (principe de récurrence) : $\wp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$I_n = \frac{n!}{\mathbf{e}}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right)\right]$$

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\mathbf{e} - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right)\right] = 0$, c'est-à-dire : $\mathbf{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}$.

Problème

Partie *A* *Étude d'une fonction g*

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de fonctions qui le sont) et on a :

$$g'(x) = \mathbf{e}^x (x-1) + \mathbf{e}^x = x\,\mathbf{e}^x$$

On a : $$g'(x) \geqslant 0 \iff x\,\mathbf{e}^x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

2) La fonction g admet donc un minimum global en 0. Or, $g(0) = 0$. Ce minimum étant nul, la fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}$.

Partie *B* *Calcul et encadrement d'une intégrale pour la détermination d'une limite*

1) On pose : $u(t) = (x-t)$ $\qquad u'(t) = -1$

$v'(t) = \mathbf{e}^t$ $\qquad v(t) = \mathbf{e}^t$ (à une constante près)

D'où : $$I(x) = \Big[(x-t)\mathrm{e}^t\Big]_0^x + \int_0^x \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t = -x + \mathbf{e}^x - 1 = \mathbf{e}^x - (1+x).$$

2) La fonction exponentielle étant croissante, $0 \leqslant t \leqslant x$ entraîne $1 \leqslant \mathbf{e}^t \leqslant \mathbf{e}^x$.

En multipliant ce dernier encadrement par $(x-t) \geqslant 0$, il vient :

$$(x-t) \leqslant (x-t)\,\mathbf{e}^t \leqslant (x-t)\,\mathbf{e}^x$$

En intégrant entre 0 et x ($0 \leqslant x$), on obtient :

$$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant I(x) \leqslant \mathbf{e}^x \int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t$$

Or : $$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $$\frac{x^2}{2} \leqslant I(x) \leqslant \frac{x^2\mathbf{e}^x}{2}$$

3) Idem avec $x \leqslant t \leqslant 0$.

4) D'après la question 1 : $$\frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2} = \frac{I(x)}{x^2}$$

Et d'après la question 2, pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{I(x)}{x^2} \leqslant \frac{\mathbf{e}^x}{2}$

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathbf{e}^x}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On montre, de même, en utilisant la question 3, que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Bilan : $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Partie *C* *Étude d'une fonction f*

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathbf{e}^x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = 0$.

La courbe C_f admet donc en $-\infty$ un asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = +\infty$.

Limite infinie en $+\infty$, donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^0}{x} = \left[\left(\mathbf{e}^x\right)'\right]_{x=0} = 1$.

Cette limite étant finie, la fonction f admet un prolongement continu en 0 et $f(0) = 1$.

3) Étudions la limite du taux de variation de f en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2}$$

D'après la question *B*4 on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4) D'après la formule de dérivation d'un quotient : $f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x x - (\mathbf{e}^x - 1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

La fonction g étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}$.

5) On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

6) La tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est donnée par l'équation : $y = f(0) + f'(0)x$.

Compte-tenu de $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$, on obtient : $(T) : y = \frac{1}{2}x + 1$.

7) Graphique :