

Exercice 1 (4 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2, b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. a. Placer les points A, B et C sur une figure.
b. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. a. On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.
b. Soit Γ le cercle de diamètre $[BC]$.
Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .
3. Soit M un point de Γ d'affixe z , distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .
 - a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.
 - b. Exprimer z' en fonction de θ .
 - c. Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.
 - d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r .

Exercice 2 Obligatoire (5 points)

Soient a un réel strictement positif

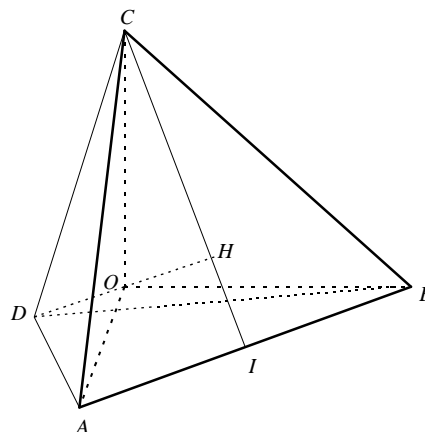
et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC, OBC sont des triangles rectangles en O .
- $OA = OB = OC = a$

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle

ABC , H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC

et D le point de l'espace défini par $\vec{HO} = \vec{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC .
3. Calcul de OH .
 - a. Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$ puis l'aire S du triangle ABC .
 - b. Exprimer OH en fonction de V et de S , en déduire que $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre $ABCD$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \frac{1}{a}\vec{OA}, \frac{1}{a}\vec{OB}, \frac{1}{a}\vec{OC}\right)$.

- a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.
- b. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
- c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

Exercice 2 Spécialité (5 points)

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2 ; seule l'équation de Γ donnée en 1.c. intervient à la question 4.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Montrer que les plans P et Q d'équations respectives : $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.
- Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q .
- On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

Montrer que Γ a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles en justifiant avec soin votre réponse.



Figure 1



Figure 2

- Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.
 - Montrer la propriété suivante :

pour tous entiers relatifs a et b , si 7 divise $a^2 + b^2$, alors 7 divise a et 7 divise b

- Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point de cône Γ , alors a, b et c sont divisibles par 7.

- En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Problème (11 points)

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B)

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc la solution de l'équation différentielle : $y' = ay$.

(Où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales)

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est strictement positive, dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifie pour tout t de $[0, +\infty[$ la relation :

$$(E) \quad g'(t) = a g(t) \left(1 - \frac{g(t)}{M}\right),$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est

solution de l'équation différentielle (E') : $y' + ay = \frac{a}{M}$.

- b. Résoudre (E').

- c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t , $g(t) = \frac{M}{1 + C e^{-at}}$, où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

- a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité :

$$0 < g(t) < M$$

- b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un unique réel t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

- c. Démontrer que $g'' = ag' \left(1 - \frac{2g}{M}\right)$. Étudier le signe de g'' . En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.

Exprimer t_0 en fonction de a et C .

- d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 , en fonction de M et C .

Partie C

1. Le tableau présenté en annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0 ; 1)$ et $(0,5 ; 2)$. En déduire les valeurs de N_0 , T et a .
2. Sachant que $g(0) = N_0$ et que $M = 100N_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}$$

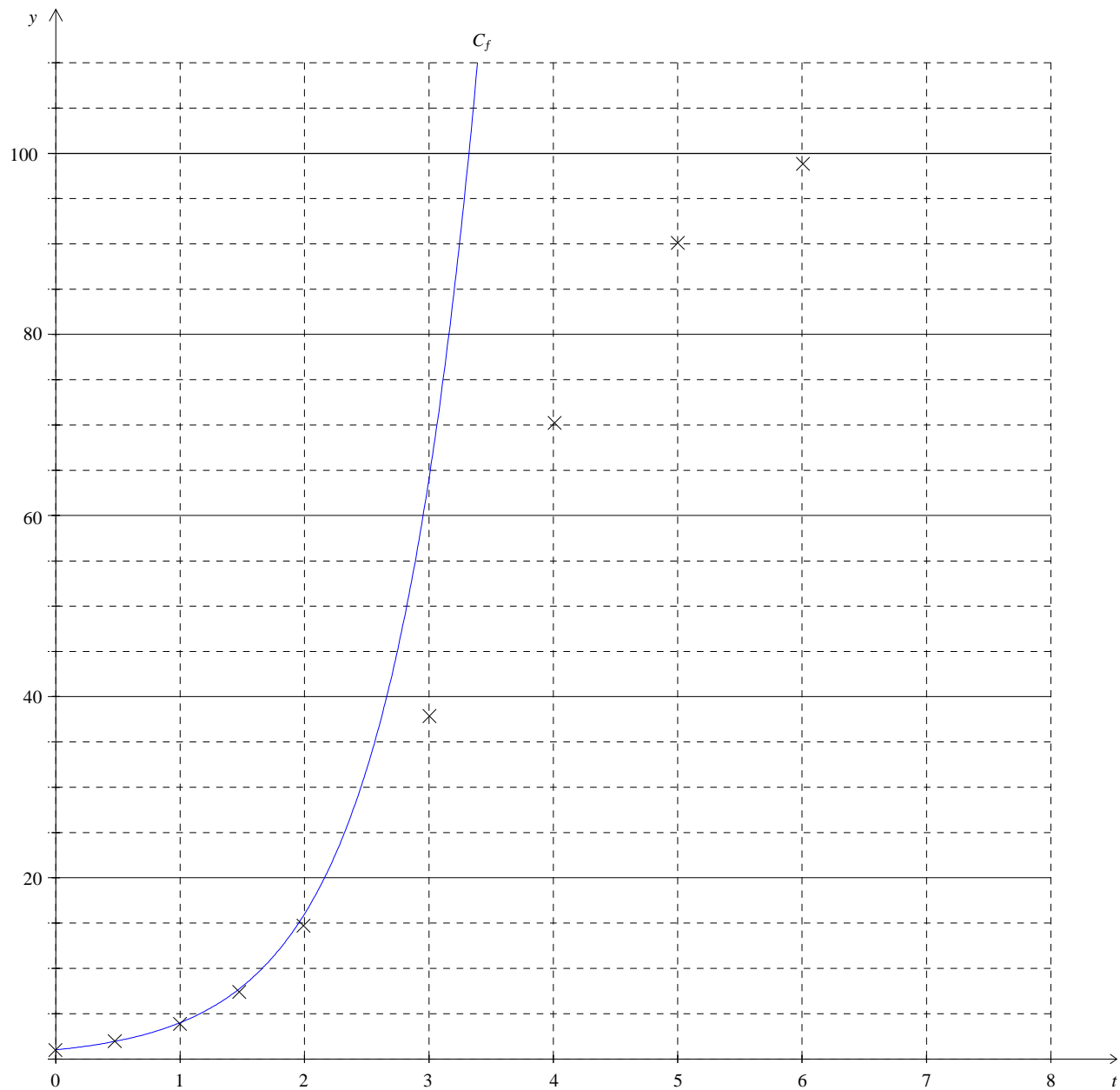
3. Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe Γ représentative de g , l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0 .
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que la fonction f , sont représentés dans le repère ci-dessous.

Annexe II



Exercice 1

1. a. Voir figure ci-dessous.

b. On a :
$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+i}{-1-i} = -i$$

On en déduit :
$$c-a = -i(b-a) \quad (*)$$

Il apparaît alors que $C = r(B)$ où r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Le triangle ABC est donc bien rectangle isocèle en A .

Remarque : pour ceux qui n'auraient pas reconnu en $(*)$ l'écriture complexe d'une rotation, ils pouvaient écrire :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{AC}) = \arg(b-a) - \arg(c-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

On en déduit que les vecteurs \vec{AC} et \vec{AB} sont orthogonaux.

(On pouvait aussi utiliser le résultat de cours suivant : si A, B et C sont trois points distincts du plan, alors :

$$\frac{c-a}{b-a} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \vec{AC} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont orthogonaux.}$$

Par ailleurs :
$$|c-a| = |b-a| = \sqrt{2}$$

En conséquence :
$$AC = AB$$

Le triangle ABC est donc bien rectangle isocèle en A .

2. a. On a vu que :
$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Donc l'angle θ de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$. (C'était évident en utilisant $(*)$)

L'écriture complexe de la rotation r est :

$$z' - a = -i(z - a)$$

L'affixe d du point $D = r(C)$ est donc :

$$d = -i(-1 + i) + 2 = 3 + i$$

b. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$. Son image Γ' , par r , est donc le cercle de diamètre $[r(B)r(C)] = [CD]$.

3. a. Le centre du cercle Γ est le point Ω d'affixe 1. (Milieu de $[BC]$).

Le rayon de Γ est 1.

Comme $M \in \Gamma$, on a :
$$\Omega M = 1$$

C'est-à-dire :
$$|z - 1| = 1$$

Notons θ un argument de $z - 1$. ($\theta \in [0, 2\pi[$)

Ainsi :
$$z - 1 = e^{i\theta}$$

Et comme $M \neq C$, on a $z \neq 1 + i$, donc $z - 1 \neq i$, donc $\theta \neq \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Bilan : il existe $\theta \in [0, 2\pi[$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, tel que $z = 1 + e^{i\theta}$

b. Comme $M' = r(M)$, on a :

$$\begin{aligned} z' - a &= -i(z - a) \\ z' - 2 &= -i(e^{i\theta} - 1) \\ z' &= 2 + i - ie^{i\theta} \end{aligned}$$

c. D'après ce qui précède, on déduit :

$$\frac{z' - c}{z - c} = \frac{1 - ie^{i\theta}}{-i + e^{i\theta}}$$

Or, un nombre complexe z est réel si et seulement si il est égal à son conjugué.

D'après les règles de calculs avec les conjugués, on a :

$$\overline{\left(\frac{z' - c}{z - c}\right)} = \overline{\left(\frac{1 - ie^{i\theta}}{-i + e^{i\theta}}\right)} = \frac{1 + ie^{-i\theta}}{i + e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}(e^{i\theta} + i)}{e^{-i\theta}(ie^{i\theta} + 1)} = \frac{e^{i\theta} + i}{ie^{i\theta} + 1}$$

Et en multipliant numérateur et dénominateur par $-i$:

$$\overline{\left(\frac{z' - c}{z - c}\right)} = \frac{-ie^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - i} = \frac{z' - c}{z - c}$$

Ce qui prouve que $\frac{z' - c}{z - c}$ est bien réel.

On en déduit que les vecteurs \vec{CM}' et \vec{CM} sont colinéaires.

D'où l'alignement des points C , M et M' .

d. Le point M a une affixe de la forme $z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

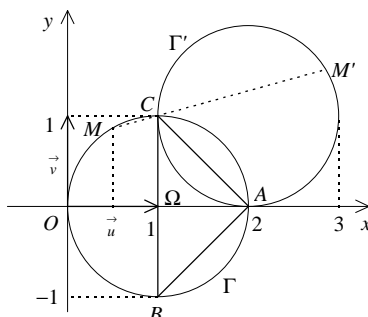
On a donc :

$$M\Omega = |z - 1| = 1$$

Donc M est un point de Γ . Son abscisse est $\operatorname{Re}(z) = 1 + \cos\frac{2\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ces renseignements permettent de construire facilement M .

Pour construire son image, il suffit de placer M' sur Γ' tel que C , M et M' soient alignés.



Exercice 2 Obligatoire

1. Les triangles OAB , OAC et OBC ont un angle égal (à savoir l'angle droit en O) compris entre deux côtés respectivement isométriques (puisque $OA = OB = OC$). Ces triangles sont donc isométriques.

En conséquence :
$$AB = AC = BC$$

Le triangle ABC est équilatéral.

(Évidemment, on pouvait aussi utiliser le théorème de Pythagore pour calculer AB , AC et BC)

2. Montrons l'orthogonalité des droites (OH) et (AB) :

Première méthode : utilisation d'un raisonnement géométrique

On constate que les points O , I et C sont équidistants de A et B . (OIC) est donc le plan **médiateur** de $[AB]$.

Donc :
$$(OIC) \perp (AB)$$

La droite (AB) est donc orthogonale à toute droite du plan (OIC) , notamment (OH) :

$$(OH) \perp (AB)$$

Deuxième méthode : utilisation du produit scalaire

Calculons le produit scalaire suivant :

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = (\vec{OI} + \vec{IH}) \cdot \vec{AB} = \vec{OI} \cdot \vec{AB} + \vec{IH} \cdot \vec{AB}$$

Or, les droites (OI) et (AB) sont perpendiculaires, donc :
$$\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$$

Et les droites (IH) et (AB) le sont également (puisque la médiane (CI) est aussi une hauteur dans le triangle

équilatéral ABC). Donc :
$$\vec{IH} \cdot \vec{AB} = 0$$

On en déduit :
$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$$

Les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

Montrons l'orthogonalité des droites (AH) et (BC) : (on en déduira que H est l'orthocentre du triangle ABC)

Première méthode : utilisation d'un raisonnement géométrique

Comme H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIC , (OH) est orthogonale à (IC) .

Par ailleurs, on vient de voir que (OH) est orthogonale à (AB) .

(OH) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) (à savoir (IC) et (AB)), donc (OH) est orthogonale au plan (ABC) . En particulier, (OH) est orthogonale à (BC) .

En outre, (BC) est orthogonale à (OA) (car (OA) est orthogonale au plan (OBC)).

La droite (BC) est donc orthogonale au plan (OHA) donc orthogonale à toute droite de ce plan, notamment :

$$(BC) \perp (AH)$$

Deuxième méthode : utilisation du produit scalaire

Calculons le produit scalaire suivant :

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{OH}) \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot \vec{BC} + \vec{OH} \cdot \vec{BC}$$

Or :

$$\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 0$$
 (car (OA) est orthogonale au plan (OBC)).

$$\vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0$$
 (car (OH) est orthogonale au plan (ABC)).

Donc :
$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$(BC) \perp (AH)$$

Bilan :

Comme les droites (AH) et (BC) sont orthogonales, (AH) est donc la hauteur issue de A dans ABC .
 H étant à l'intersection de deux hauteurs ((CI) et (AH)), c'est bien l'orthocentre du triangle ABC .

3. Calcul de OH

a. Le volume V du tétraèdre $OABC$ est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}$$

En choisissant OAB pour base d'aire $\frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{a^2}{2}$, on obtient :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2}{2} \times OC = \frac{a^3}{6}$$

L'aire S du triangle équilatéral ABC est donnée par :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times IC = \frac{1}{2} \times a \sqrt{2} \times AC \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

b. En choisissant ABC comme base, le volume V est :

$$V = \frac{1}{3} \times S \times OH$$

(On rappelle que (OH) étant orthogonale à (ABC) , c'est bien la hauteur correspondante à (ABC) dans le tétraèdre $OABC$)

D'où, d'après 3.a. :

$$OH = \frac{3V}{S}$$

Ce qui donne :

$$OH = \frac{3 \frac{a^3}{6}}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

4. Étude du tétraèdre $ABCD$

a. H étant l'orthocentre du triangle équilatéral ABC , c'est donc également son centre de gravité.

On a évidemment $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$ et $C(0, 0, a)$. On en déduit :

$$H\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

b. Les coordonnées du point D , symétrique de H par rapport à O sont donc :

$$D\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$$

On calcule les longueurs DA , DB et DC :

$$DA^2 = \frac{16}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 = 2a^2$$

$$DA = a\sqrt{2}$$

De même, on a :

$$DB = DC = a\sqrt{2}$$

Et comme $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$, le tétraèdre $ABCD$ est bien régulier.

c. Le centre Ω de la sphère circonscrite à $ABCD$ est équidistant de ces points :

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$$

En particulier, Ω est sur le plan médiateur de $[AB]$. Or, on sait que $OA = OB$, $IA = IB$ et $CA = CB$.

Le plan médiateur de $[AB]$ est donc (OIC) .

En outre, Ω est sur le plan médiateur de $[BC]$ qui n'est autre que (AOH) . (Puisque $AB = AC$, $OB = OC$ et $HB = HC$ car H est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC)

Donc Ω est situé sur l'intersection des plans (OIC) et (AOH) , à savoir (OH) .

Il existe donc un réel k tel que : $\vec{O\Omega} = k \vec{OH}$

Autrement dit, les coordonnées de Ω sont de la forme :

$$\Omega(k, k, k)$$

Et comme on sait que : $\Omega A^2 = \Omega D^2$

On obtient : $(a - k)^2 + k^2 + k^2 = 3 \left(\frac{a}{3} + k \right)^2$

$$a^2 - 2ak = \frac{a^2}{3} + 2ak$$

$$k = \frac{a}{6}$$

Conclusion : $\Omega \left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6} \right)$

Ω est le milieu de $[OH]$

Exercice 2 Spécialité

1. a. Un vecteur normal au plan P est : $\vec{u} (1, \sqrt{3}, -2)$

Un vecteur normal au plan Q est : $\vec{v} (2, 0, -1)$

Les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} ne sont manifestement pas proportionnelles (en effet, il n'existe pas de réel k tel que $0 \times k = \sqrt{3}$). En conséquence, \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires et les plans P et Q non parallèles.

b. Les plans P et Q sont non parallèles, donc ils se coupent suivant une droite Δ .

$$\text{On a : } M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ \sqrt{3}y = 2z - x = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

Un système d'équations paramétriques de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $\Delta = (OA)$ où $A(1, \sqrt{3}, 2)$ et en déduire immédiatement le résultat.

c. On sait que l'équation d'un cône d'axe (Ox) est de la forme :

$$\Gamma : y^2 + z^2 = r^2 x^2$$

Or, on connaît des points de la génératrice Δ . Par exemple $A(1, \sqrt{3}, 2)$.

Comme $A \in \Gamma$: $3 + 4 = 7 = r^2$

D'où : $\Gamma : y^2 + z^2 = 7x^2$

2. La figure 2 est obtenue en coupant le cône suivant un plan normal à son axe (ce plan ne passant pas par l'origine, sinon le cercle se réduit à un point). Il s'agit donc des plans d'équation $x = a$ avec $a \neq 0$.

En effet, notons \wp le plan d'équation $x = a$, $\Omega(a, 0, 0)$ et $C = \Gamma \cap \wp$. Ainsi :

$$M(x, y, z) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 7x^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 7a^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M^2 = 7a^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \sqrt{7}a \\ x = a \end{cases}$$

Ainsi, il apparaît que C est le cercle du plan \wp centre $\Omega(a, 0, 0)$, de rayon $\sqrt{7} a$.

La figure 1 est obtenue en coupant le cône suivant un plan parallèle à l'axe (Ox) (ce plan ne contenant pas l'axe (Ox) sinon l'hyperbole dégénère en deux droites). Il s'agit, par exemple, des plans dont une équation est du type $y = b$ ($b \neq 0$) ou $z = c$ ($c \neq 0$).

3. a. On dresse la liste des carrés modulo 7 :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

On constate qu'il n'existe pas d'entier x donc le carré soit congru à 3 modulo 7.

L'équation $x^2 = 3 [7]$ n'admet donc pas de solutions.

- b. Si 7 divise $a^2 + b^2$, alors : $a^2 + b^2 = 0 [7]$

Et d'après le tableau précédent, ceci n'est possible que si :

$$a^2 = 0 [7] \text{ et } b^2 = 0 [7]$$

On en déduit : 7 divise a^2 et 7 divise b^2

Donc : 7 divise a et 7 divise b

4. a. Soit $A(a, b, c)$ un point du cône Γ avec a, b et c entiers relatifs non nuls. On a donc :

$$b^2 + c^2 = 7a^2$$

Donc 7 divise $b^2 + c^2$.

Et d'après la question 3.b., 7 divise b et 7 divise c .

Il existe donc des entiers b' et c' tels que :

$$b = 7b' \text{ et } c = 7c'$$

Mais alors, on obtient :

$$7^2 b'^2 + 7^2 c'^2 = 7a^2$$

$$7(b'^2 + c'^2) = a^2$$

On en déduit que 7 divise a^2 et donc 7 divise a .

On a montré que si $A(a, b, c)$ est un point du cône Γ avec a, b et c entiers relatifs non nuls, alors ces entiers sont des multiples de 7.

- b. Soit $A(a, b, c)$ un point du cône Γ avec a, b et c entiers relatifs non nuls.

D'après la question précédente, a, b et c sont des multiples de 7. Il existe des entiers a', b' et c' tels que :

$$a = 7a' ; b = 7b' \text{ et } c = 7c'$$

Comme $A \in \Gamma$, on en déduit : $b'^2 + c'^2 = 7a'^2$

Le point $A'(a', b', c')$ serait donc aussi un point à coordonnées entières de Γ .

Donc ses coordonnées a', b' et c' sont divisibles par 7.

En conséquence, les entiers a, b et c sont divisibles par 7^2 .

En réitérant le procédé, a, b et c devraient être infiniment divisibles par 7, ce qui est absurde.

Le cône Γ n'a donc pas de points à coordonnées entières (autre que l'origine, évidemment)

Problème

Partie A

1. Les solutions, sur \mathbb{R}_+ , de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $f: t \mapsto C e^{at}$ où $C \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $f(0) = N_0$ impose que $C = N_0$, d'où :

$$f(t) = N_0 e^{at}$$

2. On a donc :

$$f(T) = 2f(0)$$

$$N_0 e^{aT} = 2 N_0$$

$$aT = \ln 2$$

$$a = \frac{\ln 2}{T}$$

D'où :

$$f(t) = N_0 e^{\frac{t}{T} \ln 2} = N_0 2^{\frac{t}{T}}$$

Partie B

1. a. On calcule :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' + a \frac{1}{g} = -\frac{g'}{g^2} + a \frac{1}{g} = \frac{-g' + ag}{g^2}$$

Et comme g est solution de (E), on a : $g' = ag \left(1 - \frac{g}{M}\right)$

En remplaçant :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' + a \frac{1}{g} = \frac{-ag \left(1 - \frac{g}{M}\right) + ag}{g^2} = \frac{a}{M}$$

Donc la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de (E') : $y' + ay = \frac{a}{M}$.

b. On sait (voir formulaire) que les solutions des l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $f: t \mapsto C e^{at} - \frac{b}{a}$.

Dans le cas de (E'), on obtient alors les fonctions de la forme $t \mapsto K e^{-at} + \frac{1}{M}$.

Remarque : on pouvait aussi résoudre l'équation sans second membre et y ajouter une solution particulière, en l'occurrence : $t \mapsto \frac{1}{M}$.

c. Soit h une solution strictement positive de (E') :

$$h' + ah = \frac{a}{M}$$

Vérifions que $\frac{1}{h}$ est solution de (E). On calcule :

$$\left(\frac{1}{h}\right)' - a \frac{1}{h} \left(1 - \frac{1}{hM}\right) = -\frac{h'}{h^2} - \frac{a}{h} + \frac{a}{Mh^2} = \frac{-Mh' - Mha + a}{Mh^2} = \frac{-M(h' + ah) + a}{Mh^2}$$

Et comme $h' + ah = \frac{a}{M}$, il vient :

$$\left(\frac{1}{h}\right)' - a \frac{1}{h} \left(1 - \frac{1}{hM}\right) = 0$$

Ce qui prouve bien que $\frac{1}{h}$ est solution de (E).

2. a. Étude de la limite de g en $+\infty$:

Comme a est un réel **strictement positif**, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = M$$

La droite Δ d'équation $y = M$ est donc asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe Γ représentant g .

Preuve de la double inégalité $0 < g(t) < M$ pour tout t réel positif ou nul :

Partons de l'hypothèse : $a > 0$

En multipliant par $t \in \mathbb{R}_+$: $at \geq 0$

Par croissance de l'exponentielle sur \mathbb{R}_+ :

$$e^{-at} \geq 1$$

Or, $C > 1$, d'où :

$$1 + Ce^{-at} \geq 1 + C > 1$$

Par **stricte** décroissance de la fonction inverse sur $]1, +\infty[$, nous obtenons :

$$\frac{1}{1 + Ce^{-at}} < 1$$

En multipliant par $M > 0$:

$$g(t) < M$$

Par ailleurs, il est clair que g est strictement positive (M , C et l'exponentielle le sont)

D'où, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $0 < g(t) < M$

b. Étude des variations de g :

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+ puisque la fonction exponentielle l'est sur \mathbb{R}_+ et la fonction inverse l'est sur \mathbb{R}_+^* . De plus, on a :

$$g = \frac{M}{v} \text{ avec } v : t \mapsto 1 + Ce^{-at}$$

Donc

$$g' = -\frac{Mv'}{v^2}$$

On obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = \frac{MCae^{-at}}{(1 + Ce^{-at})^2}$$

On remarque alors que :

$$g'(t) = a \times \frac{M}{1 + Ce^{-at}} \times \left(\frac{Ce^{-at}}{1 + Ce^{-at}}\right)$$

$$g'(t) = a \times \frac{1}{1 + Ce^{-at}} \times \left(\frac{Ce^{-at} + 1 - 1}{1 + Ce^{-at}}\right) = a g(t) \left(1 - \frac{1}{1 + Ce^{-at}}\right)$$

$$g'(t) = a g(t) \left(1 - \frac{g(t)}{M}\right)$$

Remarque : l'énoncé ne demandait pas explicitement de vérifier que g est bien solution de (E), ce qui est fait ci-contre.

La fonction g est donc une solution de (E) .

Mieux, on remarque que $\frac{1}{g} : t \mapsto Ke^{-at} + \frac{1}{M}$ où $K = \frac{C}{M} > 0$

Ainsi $\frac{1}{g}$ est solution strictement positive de (E') et d'après 1.c., son inverse g est donc solution de (E) .

Or, on a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 < g(t) < M$$

Comme $M > 0$, on en déduit :

$$0 < \frac{g(t)}{M} < 1$$

$$1 - \frac{g(t)}{M} > 0$$

Finalement :

$$g'(t) > 0$$

On en déduit que g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Remarque : l'énoncé incitait à utiliser (E) alors qu'il y avait bien plus simple :

$$t \mapsto 1 + Ce^{-at} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et à valeurs dans } \mathbb{R}_+^*$$

La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , donc par composition, g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Existence d'un unique $t_0 \in [0, +\infty[$ vérifiant $g(t_0) = M/2$:

- On vient de voir que g est **strictement croissante** sur \mathbb{R}_+ .
- Par ailleurs, g est dérivable sur \mathbb{R}_+ donc **continue** sur \mathbb{R}_+ .
- De plus :

$$g(0) = \frac{M}{1+C} < \frac{M}{2} \text{ car } C > 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = M$$

On en déduit que g est une **bijection** de $[0, +\infty[$ dans $\left[\frac{M}{1+C}, M\right]$.

Et comme $\frac{M}{2} \in \left[\frac{M}{1+C}, M\right]$, on en déduit bien l'existence d'un unique réel t_0 tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

c. On a vu que :

$$g' = ag \left(1 - \frac{g}{M}\right)$$

En dérivant :

$$g'' = ag' \left(1 - \frac{g}{M}\right) - \frac{agg'}{M} = ag' \left(1 - \frac{2g}{M}\right)$$

D'après 2.a., g est positive sur \mathbb{R}_+ et d'après 2.b., g' est positive sur \mathbb{R}_+ . Comme $a > 0$ et $M > 0$, on a :

$$g'' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2g}{M} \geq 0 \Leftrightarrow g \leq \frac{M}{2}$$

Et comme g est croissante :

$$g(t) \leq \frac{M}{2} \Leftrightarrow t \in [0, t_0]$$

On en déduit le signe de g'' :

t	0	t_0	$+\infty$
signe de g''	+	0	-

En conséquence g' est décroissante sur $[t_0, +\infty[$, ce qui permet bien d'affirmer que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 .

On sait que t_0 vérifie :

$$g(t_0) = \frac{M}{2}$$

$$\frac{M}{1 + C e^{-at_0}} = \frac{M}{2}$$

$$C e^{-at_0} = 1$$

$$-at_0 = -\ln C$$

$$t_0 = \frac{\ln C}{a}$$

d. Le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 est égal à la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0, t_0]$:

$$\bar{g} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} g(t) dt = \frac{a}{\ln C} \int_0^{t_0} \frac{M}{1 + C e^{-at}} dt = \frac{M}{\ln C} \int_0^{t_0} \frac{a e^{at}}{e^{at} + C} dt$$

Le quotient $\frac{a e^{at}}{e^{at} + C}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$) dont une primitive est $\ln u$.

D'où :

$$\bar{g} = \frac{M}{\ln C} (\ln(e^{at_0} + C) - \ln(1 + C))$$

Et comme $t_0 = \frac{\ln C}{a}$, nous obtenons :

$$\bar{g} = \frac{M}{\ln C} (\ln(e^{\ln C} + C) - \ln(1 + C))$$

$$\bar{g} = \frac{M}{\ln C} (\ln(2C) - \ln(1 + C))$$

$$\bar{g} = \frac{M}{\ln C} \ln\left(\frac{2C}{1 + C}\right)$$

Partie C

1. On a donc $f(0) = 1$ et $f(0,5) = 2$. On a vu à la partie A que f est définie par $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$. Ainsi, on obtient :

$$f(0) = N_0 = 1 \text{ et } f(0,5) = 2^{\frac{0,5}{T}} = 2$$

D'où :

$$\ln\left(2^{\frac{0,5}{T}}\right) = \ln 2$$

$$\frac{0,5}{T} = 1$$

$$T = 0,5$$

Et comme par ailleurs, on a $f(t) = N_0 e^{at} = e^{at}$, la condition $f(0,5) = 2$, nous donne :

$$2 = e^{0,5a}$$

$$\ln 2 = \frac{1}{2} a$$

$$a = 2 \ln 2 = \ln 4$$

On a donc :

$$f(t) = e^{t \ln 4} = 4^t$$

2. La condition $g(0) = N_0 = 1$ s'écrit :

$$\frac{M}{1+C} = 1$$

Comme $M = 100N_0 = 100$, il vient :

$$\frac{100}{1+C} = 1$$

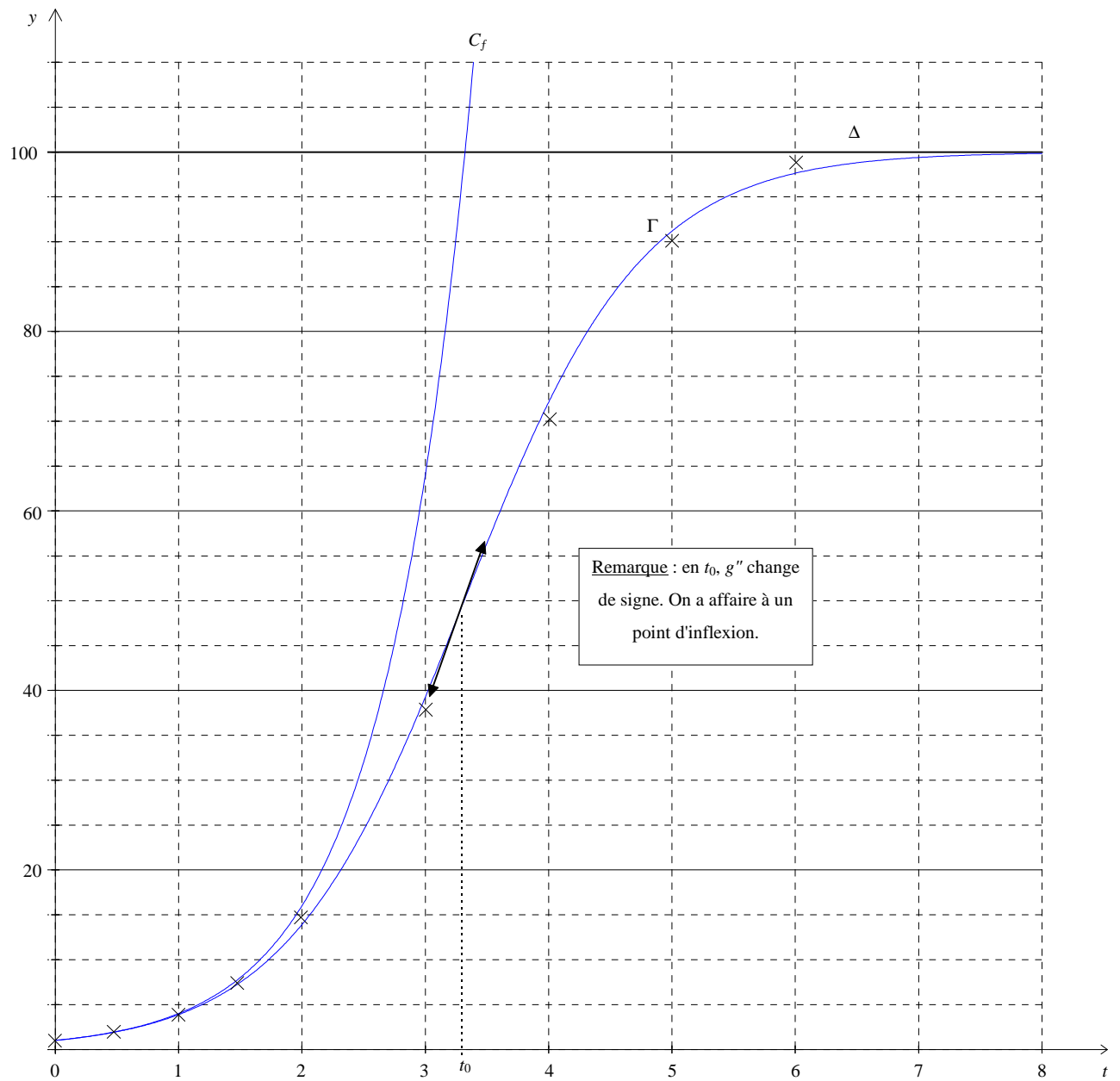
$$C = 99$$

Et comme $a = \ln 4$, nous obtenons finalement :

$$g(t) = \frac{100}{1+99e^{-t \ln 4}} = \frac{100}{1+99 \times 4^{-t}}$$

3. Représentation graphique :

On calcule $t_0 = \frac{\ln C}{a} = \frac{\ln 99}{2 \ln 2} \simeq 3,31$ à 10^{-2} près.



4. Le premier modèle (modélisé par f) est adapté pour des petites valeurs de t , à savoir $t \in [0, 1]$.