ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE DEUX

SOMMAIRE

Contexte :

I est un intervalle non vide et non réduit à un point.

a, b et c sont des applications **continues** de I dans $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y'' + a\,y' + b\,y = c$$

$$(E_0) : y'' + a\,y' + b\,y = 0$$

(Équation sans second membre)

On notera $S(I)$ (resp. $S(I)$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E_0)) sur I.

On note également $(\xi) : r^2 + a\,r + b = 0$ l'équation caractéristique de (E_0).

> Remarque :
> Si y est une solution de (E) sur I alors y est nécessairement élément de $C^2(I)$ car :
> $$y'' = c - a\,y' - b\,y$$
> Donc y'' est continue sur I (car a, b, c, y et y' le sont).
> Idem si y est une solution de (E_0).

1. Existence de solution

1.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 2

Étant donnés $t_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution y sur I au problème :

$$(P) : \begin{cases} (E) \\ y(t_0) = \alpha \text{ et } y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Démonstration :

Remarquons que l'on a : $\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Posons : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

On ramène l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à celle d'un système différentiel d'ordre 1.

Ainsi le problème (P) est équivalent à : $Y' = A\,Y + B$ et $Y(t_0) = Y_0$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les systèmes différentiels d'ordre 1 (démontré en fin de document) assure l'existence et l'unicité d'une solution sur I.

En conséquence, le problème (P) admet une unique solution sur I.

Maintenant que nous sommes assurés de l'existence de solutions, précisons la structure de l'ensemble des solutions.

1.2. Théorème Espace vectoriel $S_0(I)$

L'ensemble des solutions $S_0(I)$ de (E_0) sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration :

Montrons que $S_0(I)$ est un espace vectoriel.

Soit f l'application :
$$f : C^2(I) \to C(I)$$
$$y \mapsto y'' + a\,y' + b\,y$$

Il est clair que f est une application linéaire. (Linéarité de la dérivée)

Et comme : $\operatorname{Ker} f = \{y \in C^2(I) \mid y'' + a\,y' + b\,y = 0\} = S_0(I)$

On en déduit que $S_0(I)$ est un espace vectoriel (en tant que sous-espace-vectoriel de $C^2(I)$)

Montrons que $\dim_{\mathbb{K}} S_0(I) = 2$.

Soit $t_0 \in I$. Considérons l'application :
$$g : S_0(I) \to \mathbb{K}^2$$
$$y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$$

Il est clair que g est linéaire. De plus g est bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Donc g est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Comme $\dim \mathbb{K}^2 = 2$, on en déduit :

$$\dim_{\mathbb{K}} S_0(I) = 2$$

1.3. Conséquence

Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E_0) sur I. Alors :

$$y \in S_0(I) \iff \exists (A, B) \in \mathbb{K}^2,\ y = A\,y_1 + B\,y_2$$

On dit aussi parfois : y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions...

1.4. Théorème Espace affine $S(I)$

L'ensemble des solutions $S(I)$ de (E) sur I est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 2 et de direction $S_0(I)$.

Démonstration :

Soit φ l'application :
$$\varphi : S(I) \times S(I) \longrightarrow S_0(I)$$
$$(y_1, y_2) \longmapsto y_1 - y_2$$

On vérifie que φ est bien à valeur dans $S_0(I)$:

Si $\quad y_1'' + a\, y_1' + b\, y_1 = c \quad \text{et} \quad y_2'' + a\, y_2' + b\, y_2 = c$

Alors, par différence : $\quad (y_1 - y_2)'' + a\,(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0$

Donc $\quad y_1 - y_2 \in S_0(I)$

Espace affine : soit $\vec{E}$ un espace vectoriel.

On dit que E est un espace affine associé à $\vec{E}$ s'il existe une application :
$$\varphi : E \times E \to \vec{E}\ ,\ (M, P) \mapsto \varphi(M, P)$$
telle que :
- $\varphi(M, P) + \varphi(P, Q) = \varphi(M, Q)$ (Chasles)
- $\forall u \in \vec{E}\ , \forall O \in E, \exists! M \in E, u = \varphi(O, M)$

On vérifie la relation de Chasles pour φ :
$$\forall (y_1, y_2, y_3) \in (S(I))^3,\ \ \varphi(y_1, y_2) + \varphi(y_2, y_3) = y_1 - y_2 + y_2 - y_3 = y_1 - y_3 = \varphi(y_1, y_3)$$

Et enfin, on vérifie la propriété :
$$\forall u \in S_0(I),\ \forall y_0 \in S(I),\ \exists! y \in S(I),\ \varphi(y_0, y) = u$$

Soient $u \in S_0(I)$ et $y_0 \in S(I)$.

On a donc : $\quad u'' + a\, u' + b\, u = 0 \quad \text{et} \quad y_0'' + a\, y_0' + b\, y_0 = c$

Posons $y = y_0 - u$. Alors, $\varphi(y_0, y) = u$ et $y \in S(I)$.

Enfin, s'il existe $z \in S(I)$ tel que $\varphi(y_0, z) = u$, c'est-à-dire $z = y_0 - u$ alors $z = y$.

On conclut : $\quad S(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine associé à $S_0(I)$

Et comme, dim $S_0(I) = 2$, on a, par définition, dim $S(I) = 2$.

1.5. Conséquence

La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

Démonstration :

Notons $y_0 = A\, y_1 + B\, y_2$ la solution générale de (E_0). ((y_1, y_2) est une base de $S_0(I)$ et $(A, B) \in \mathbb{K}^2$)

Notons y_p une solution particulière de (E).

Il est clair que $y_0 + y_p$ est solution de (E).

Réciproquement, soit y une solution de (E). Alors $y - y_p$ est une solution de (E_0). Donc $y = y_0 + y_p$.

On a montré : $\quad y \in S(I) \iff y - y_p \in S_0(I)$

2. Wronskien

On a vu au parapraphe précédent que l'espace des solutions (vectoriel ou affine) est de dimension 2.

Présentons un outil permettant de vérifier simplement si deux solutions sont indépendantes ou non.

2.1 Définition **Wronskien**

Soient y_1 et y_2 deux applications dérivables sur I.

On appelle Wronskien de y_1 et y_2 l'application définie sur I par :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$W(y_1, y_2) = y_1\, y_2' - y_2\, y_1'$$

Remarque : si y_1 et y_2 sont éléments de $C^n(I)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors $W(y_1, y_2)$ est élément de $C^{n-1}(I)$.

2.2 Propriétes du Wronskien

1. On a : y_1 et y_2 dérivables et liées sur $I \Rightarrow W(y_1, y_2) = 0$ sur I
2. Si, de plus y_1 et y_2 sont éléments de $S_0(I)$ alors on a équivalence des assertions suivantes

$$y_1 \text{ et } y_2 \text{ liées sur } I \Leftrightarrow W(y_1, y_2) = 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow \exists t_0 \in I,\ W(y_1, y_2)(t_0) = 0$$

$$\boldsymbol{y_1 \text{ et } y_2 \text{ indépendantes sur } I \Leftrightarrow \exists t_0 \in I,\ W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t_0 \in I,\ W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0}$$

Démonstration :

1. Supposons y_1 et y_2 liées sur I : $\exists (A, B) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0, 0),\ A\, y_1 + B\, y_2 = 0$ sur I

   Alors : $$AW(y_1, y_2) = A\, y_1\, y_2' - A\, y_2\, y_1' = -B\, y_2\, y_2' + B\, y_2\, y_2' = 0 \text{ sur } I$$

   Donc $$A = 0 \text{ ou } W(y_1, y_2) = 0 \text{ sur } I$$

   Mais si $A = 0$ alors $B \neq 0$ et $B\, y_2 = 0$ sur I. Donc $y_2 = 0$ sur I.

   D'où : $$W(y_1, y_2) = 0 \text{ sur } I$$

   Remarque : sans hypothèse supplémentaire, on ne peut pas affirmer la réciproque de cette implication.

   En effet, considérons : $y_1(t) = t^3$ et $y_2(t) = |t|^3$ pour $t \in \mathbb{R}$

   Les applications y_1 et y_2 sont dérivables sur I et :

   $$y_1'(t) = 3t^2 \quad \text{et} \quad y_2'(t) = 3t|t|$$

   On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(y_1\, y_2' - y_2\, y_1')(t) = 3t^4|t| - 3t^2|t|^3 = 0$

   Le Wronskien de y_1 et y_2 est identiquement nul sur $\mathbb{R}$ et pourtant y_1 et y_2 ne sont pas liées puisque :

   $$y_1 = y_2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad y_1 = -y_2 \text{ sur } \mathbb{R}_-$$

   Par contre, si on suppose que y_1 ne s'annule jamais sur I alors la condition $W(y_1, y_2) = 0$ sur I peut s'écrire :

   $$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \text{ sur } I$$

   Il existe donc une constante k telle que $y_2 = k y_1$ sur I et, par suite, y_1 et y_2 sont liées.

   Dans ce cas la réciproque est alors vraie. C'est aussi le cas aussi y_1 et y_2 sont éléments de $S_0(I)$. (Voir le point 2)

2. Supposons y_1 et y_2 liées sur I. Alors d'après 1, on a $W(y_1, y_2) = 0$ sur I. Donc, a fortiori :

   $$\exists t_0 \in I,\ W(y_1, y_2)(t_0) = 0$$

   Réciproquement, supposons : $\exists t_0 \in I,\ W(y_1, y_2)(t_0) = 0$

Comme y_1 et y_2 sont solutions de (E_0), elles sont éléments de $C^2(I)$. Donc $W(y_1, y_2)$ est élément de $C^1(I)$ et :

$$W'(y_1, y_2) = y_1' \ y_2' + y_1 \ y_2'' - y_1' \ y_2' - y_1'' y_2 = y_1(-a\,y_2' - b\,y_2) - y_2(-a\,y_1' - b\,y_1) = -a\,W(y_1, y_2)$$

On en déduit : $\exists K \in \mathbb{K}, \forall t \in I, W(y_1, y_2)(t) = K\,\mathbf{e}^{-A(t)}$ où A est une primitive de a sur I

Or, par hypothèse : $\exists t_0 \in I, W(y_1, y_2)(t_0) = 0$

Donc $K = 0$

Donc : $W(y_1, y_2) = 0$ sur I

Montrons que y_1 et y_2 sont liées sur I. Si $y_1 = 0$ sur I, il n'y a rien à faire.

Supposons y_1 non identiquement nulle sur I, alors :

$$\exists t_0 \in I, y_1(t_0) \neq 0$$

Posons : $y = y_1(t_0)y_2 - y_2(t_0)y_1$

Comme y est combinaison linéaire de y_1 et y_2 : $y \in S_0(I)$

Or, l'application y vérifie les conditions initiales :

$$y(t_0) = 0 \ \text{ et } \ y'(t_0) = y_1(t_0)\ y_2'(t_0) - y_2(t_0)\ y_1'(t_0) = W(y_1, y_2)(t_0) = 0$$

Or, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (voir 1.1.), il existe une unique solution de (E_0) qui vérifie ces conditions. Et comme la fonction identiquement nulle sur I les vérifie aussi :

$$y = 0 \text{ sur } I$$

Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0, 0)$ (à savoir $A = -y_2(t_0)$ et $B = y_1(t_0) \neq 0$) tel que :

$$Ay_1 + By_2 = 0 \ \text{ sur } I$$

$$y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont liées sur } I$$

Les équivalences sur l'indépendance s'obtiennent pas contraposition.

2.3. Théorème **Cas des coefficients *a* et *b* constants dans (E_0)**

On recherche des solutions de (E_0) sous la forme : $y(t) = \mathbf{e}^{rt}$. C'est ainsi qu'on obtient l'équation caractéristique.

Si l'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$

- admet deux racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors :

$$S_0(I) = \{y : t \in I \mapsto A\,\mathbf{e}^{r_1 t} + B\,\mathbf{e}^{r_2 t}, ((A, B) \in \mathbb{K}^2\}$$

- admet une racine double r_0 dans $\mathbb{C}$, alors :

$$S_0(I) = \{y : t \in I \mapsto (A + Bt)\,\mathbf{e}^{r_0 t}, ((A, B) \in \mathbb{K}^2\}$$

Démonstration :

Comme on sait que $\dim S_0(I) = 2$, il suffit de vérifier (à l'aide du Wronskien) que l'on a un système fondamental de solutions :

Deux racines : $$W(\mathbf{e}^{r_1 t}, \mathbf{e}^{r_2 t}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{r_1 t} & \mathbf{e}^{r_2 t} \\ r_1\mathbf{e}^{r_1 t} & r_2\mathbf{e}^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\,\mathbf{e}^{(r_1+r_2)t} \neq 0 \text{ car } r_1 \neq r_2$$

Racine double : $$W(\mathbf{e}^{r_0 t}, t\,\mathbf{e}^{r_0 t}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{r_0 t} & t\mathbf{e}^{r_0 t} \\ r_0\mathbf{e}^{r_0 t} & (r_0 t + 1)\mathbf{e}^{r_0 t} \end{vmatrix} = \mathbf{e}^{2r_0 t} \neq 0$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, alors en notant $r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta$, $(r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta)$ l'expression des solutions devient : $y(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}(C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t))$ où $C = A + B$ et $D = A - B$

3. Résolution de (E_0)

Il n'y a pas de méthode générale pour trouver d'emblée deux solutions indépendantes de (E_0).

3.1. Pour résoudre (E_0) il faut donc déjà connaître au moins une solution. (On peut rechercher une solution évidente sous forme polynomiale ou exponentielle, ou rechercher une solution développable en série entière : voir série d'exercices correspondante)

Connaissant alors une première solution de (E_0), on peut (sous certaines conditions) en trouver une autre qui lui est indépendante. C'est la méthode de Lagrange.

> <u>3.2. Théorème</u> Méthode de Lagrange (ou de variation de la constante)
>
> Supposons connue une solution y_1 de (E_0) **ne s'annulant pas** sur I.
>
> On peut déterminer une solution y_2 de (E_0) qui soit indépendante de y_1 par la méthode de la variation de la constante en posant : $y_2 = \lambda\, y_1$ où $\lambda \in C^2(I)$

<u>Démonstration</u> :

On a :

$$y_2' = \lambda'\, y_1 + \lambda\, y_1'$$

$$y_2'' = \lambda''\, y_1 + 2\,\lambda'\;y_1' + \lambda\, y_1'' = \lambda''\, y_1 + 2\,\lambda'\;y_1' + \lambda(-a\, y_1' - b\, y_1)$$

En remplaçant dans (E_0) :

$$\lambda''\, y_1 + 2\,\lambda'\;y_1' + \lambda(-a\, y_1' - b\, y_1) + a(\lambda'\, y_1 + \lambda\, y_1') + b\lambda\, y_1 = 0$$

$$y_1\,\lambda'' + (2\, y_1' + a\, y_1)\,\lambda' = 0$$

<u>Remarque</u> : si y_1 s'annule sur I, on applique la méthode ci-contre à un intervalle $J \subset I$ sur lequel y_1 ne s'annule pas. Puis, on vérifie, a posteriori, que la solution y_2 obtenue sur J est encore valable sur I.

Posons $\mu = \lambda'$. Comme y_1 ne s'annule pas sur I :

$$\mu' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + a\right)\mu = 0$$

D'où, par exemple : $\mu(t) = \mathbf{e}^{-2\ln(|y_1(t)|) - A(t)}$ où A est une primitive de a

Donc : $$\lambda'(t) = \frac{\mathbf{e}^{-A(t)}}{(y_1(t))^2}$$

D'où : λ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\mathbf{e}^{-A(t)}}{(y_1(t))^2}$

En fait, si on ne choisit pas de constante particulière, μ est de la forme :

$$\mu(t) = H\,\mathbf{e}^{\varphi(t)}$$

Puis :

$$\lambda(t) = H\int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + K$$

Puis :

$$y_2(t) = \left(H\int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + K\right) \times y_1(t)$$

est alors la solution générale de (E_0)

Vérifions que la solution y_2 ainsi construite est indépendante de y_1. Pour cela, on calcule leur Wronskien :

$$W(y_1, y_2) = W(y_1, \lambda\, y_1) = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda' y_1 + \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda'\; y_1^2 = \mathbf{e}^{-A}$$

Donc : $$\forall t_0 \in I,\ W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$$

Ce qui permet d'affirmer que y_1 et y_2 sont bien indépendantes.

<u>Exemple</u> : résoudre (E_0) : $(t + 1)\, y'' - y' - t\, y = 0$ sur $I =]-1, +\infty[$

Il est clair que $y_1 : t \longmapsto \mathbf{e}^t$ est solution de (E_0).

y_1 ne s'annule pas sur I. Posons : $y_2 = \lambda\, y_1$

On a alors : $$y_2'(t) = (\lambda(t) + \lambda'(t))\;\mathbf{e}^t$$

$$y_2''(t) = (\lambda(t) + 2\lambda'(t) + \lambda''(t))\ \mathbf{e}^t$$

En remplaçant dans (E_0) :

$$(t+1)\ (\lambda(t) + 2\lambda'(t) + \lambda''(t))\ \mathbf{e}^t - (\lambda(t) + \lambda'(t))\ \mathbf{e}^t\ - t\,\lambda(t)\ \mathbf{e}^t = 0$$

$$(t+1)\ \lambda''(t) + (2t+1)\lambda'(t) = 0$$

$$\lambda''(t) + \left(2 - \frac{1}{t+1}\right)\lambda'(t) = 0$$

$$\lambda'(t) = K(t+1)\ \mathbf{e}^{-2t}$$

En choisissant $K = 1$: $\quad \lambda'(t) = (t+1)\ \mathbf{e}^{-2t}$

Posons : $\quad \lambda(t) = (at+b)\ \mathbf{e}^{-2t}$

Alors : $\quad \lambda'(t) = (a - 2at - 2b)\ \mathbf{e}^{-2t}$

D'où : $\quad a = -\dfrac{1}{2}\ ;\ b = -\dfrac{3}{4}$

Donc : $\quad y_2(t) = \left(-\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}\right)\mathbf{e}^{-2t}\ \mathbf{e}^t = \left(-\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}\right)\mathbf{e}^{-t}$

Et : $\quad S_0(]-1, +\infty[) = \{y : t \in\ ]-1, +\infty[\ \longmapsto A\,\mathbf{e}^t + B\left(-\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}\right)\mathbf{e}^{-t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

3.3. Application :

Résoudre l'équation d'Euler : $\quad (E_0) : at^2\,y'' + bt\,y' + cy = 0$ sur $I =]0, +\infty[$

> On appelle équation d'Euler (d'ordre 2) toute équation de la forme :
>
> $$a\,t^2\,y''(t) + b\,t\,y'(t) + c\,y(t) = 0$$
>
> où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$
>
> Deux techniques de résolution :
>
> 1) Rechercher des solutions sous la forme $y(t) = t^r$ avec $r \in \mathbb{C}$, comme ci-contre.
>
> 2) On pose $y = z \circ \ln$. On obtient une équation en z à coefficients constants.
>
> On utilise alors 2.3.

Méthode 1 :

On recherche des solutions sous la forme $y(t) = t^r$, avec $r \in \mathbb{C}$.

On a alors : $\quad at^2\ r(r-1)t^{r-2} + bt\ r\ t^{r-1} + c\ t^r = 0$

Et comme $t > 0$: $\quad a(r^2 - r) + br + c = 0$

On obtient l'équation caractéristique d'Euler :

$$(\zeta) : ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Si (ζ) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors, on obtient deux solutions :

$$y_1(t) = t^{r_1} \text{ et } y_2(t) = t^{r_2}$$

On vérifie que ces deux solutions sont indépendantes en calculant leur Wronskien :

$$\forall t \in I,\ W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t^{r_1} & t^{r_2} \\ r_1 t^{r_1 - 1} & r_2 t^{r_2 - 1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\ t^{r_1 + r_2 - 1} \neq 0 \text{ car } r_1 \neq r_2$$

D'où : $\quad S_0(I) = \{y : t \in I \longmapsto A\,t^{r_1} + B\,t^{r_2}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Si (ζ) admet une racine double r_0 alors on obtient une première solution :

$$y_1(t) = t^{r_0}$$

Cette solution ne s'annulant pas sur I, on peut appliquer la méthode de Lagrange (3.2.) pour trouver une seconde solution y_2 indépendante de y_1 :

Posons : $\quad y_2(t) = \lambda(t)\ t^{r_0}$ avec $\lambda \in C^2(I)$

On a successivement : $\quad y_2'(t) = \lambda'(t)\ t^{r_0} + r_0\,\lambda(t)\ t^{r_0 - 1}$

$$y_2''(t) = \lambda''(t)\ t^{r_0} + 2r_0\,\lambda'(t)\ t^{r_0-1} + r_0(r_0-1)\,\lambda(t)\ t^{r_0-2}$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$a\,t^2(\lambda''(t)\ t^{r_0} + 2r_0\,\lambda'(t)\ t^{r_0-1} + r_0(r_0-1)\,\lambda(t)\ t^{r_0-2}) + bt(\lambda'(t)\ t^{r_0} + r_0\,\lambda(t)\ t^{r_0-1}) + c\lambda(t)\ t^{r_0} = 0$$

$$a\ t^{r_0+2}\,\lambda''(t) + (2a\,r_0 + b)\ t^{r_0+1}\ \lambda'(t) + \ (ar_0(r_0-1) + br_0 + c)\ t^{r_0}\ \lambda(t) = 0$$

Et comme r_0 vérifie $ar_0(r_0-1) + br_0 + c = 0$, il reste :

$$a\ t^{r_0+2}\,\lambda''(t) + (2a\,r_0 + b)\ t^{r_0+1}\ \lambda'(t) = 0$$

Or, r_0 est racine double de (ζ) donc $2ar_0 + (b-a) = 0$ d'où :

$$a\ t^{r_0+2}\,\lambda''(t) + a\,t^{r_0+1}\,\lambda'(t) = 0$$

Et comme $a\,t^{r_0+2} \neq 0$: $$\lambda''(t) + \frac{1}{t}\lambda'(t) = 0$$

Posons $\mu = \lambda'$, ainsi nous avons une équation du premier ordre en μ :

$$\mu'(t) + \frac{1}{t}\ \mu(t) = 0$$

D'où : $$\mu(t) = K_1\,\mathbf{e}^{-\ln t} = K_1\ \frac{1}{t}$$

$$\lambda(t) = K_1 \ln t + K_2$$

Et finalement : $$y_2(t) = (K_1 \ln t + K_2)\ t^{r_0}$$

Une base de $S_0(I)$ est donc : $$(t \longmapsto t^{r_0}\ ,\ t \longmapsto (\ln t)\ t^{r_0}\ )$$

Méthode 2 :

On pose : $$y = z \circ \ln$$

C'est-à-dire : $$y(t) = z(\ln t)$$

On a alors : $$y'(t) = \frac{1}{t}z'(\ln t)$$

$$y''(t) = \frac{1}{t^2}z''(\ln t) - \frac{1}{t^2}z'(\ln t)$$

En remplaçant dans (E_0) et en posant $x = \ln t$:

$$a\,z''(x) - a\,z'(x) + b\,z'(x) + c\,z(x) = 0$$

On obtient une équation en z à coefficients constants.

Notons $$(\zeta) : ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Si (ζ) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors :

$$z(x) = A\,\mathbf{e}^{r_1 x} + B\,\mathbf{e}^{r_2 x}$$

$$y(t) = z(\ln t) = A\,t^{r_1} + B\,t^{r_2}$$

Si (ζ) admet une racine double r_0 alors :

$$z(x) = (A + Bx)\,\mathbf{e}^{r_0 x}$$

$$y(t) = z(\ln t) = (A + B\ln t)\ t^{r_0}$$

4. Résolution de (*E*)

On suppose, dans ce paragraphe que l'équation sans second membre (E_0) a déjà été résolue.

Si l'on connaît une solution particulière de (E), on peut résoudre complètement (E). (Car $S(I)$ est un espace affine de direction $S_0(I)$).

À défaut, on présente une méthode ci-dessous qui peut permettre de déterminer une telle solution particulière.

<u>4.1. Théorème</u> Méthode de variation des constantes

Cette méthode permet de calculer une solution particulière de (E). (Sous réserve de déterminer les primitives H et K)

Supposons connue une base (y_1, y_2) de $S_0(I)$.

1. Le système :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$ d'inconnues h et k dans $C^1(I)$

Attention : c représente le second membre après <u>normalisation</u> !

   admet une unique solution.

2. Si H et K désignent des primitives de h et k sur I, alors l'application

$$y = H\,y_1 + K\,y_2$$

   est élément de $S(I)$.

<u>Démonstration</u> :

1. Comme y_1 et y_2 sont des solutions indépendantes de (E_0), on a, d'après les propriétés du Wronskien :

$$\forall t \in I,\ W(y_1, y_2)(t) \neq 0$$

   Or, $W(y_1, y_2)(t)$ est le déterminant du système.

   Pour chaque $t \in I$, le système admet un unique couple $(h(t), k(t))$ solution.

   Donc, le système admet un unique couple (h, k) solution sur $(C^1(I))^2$.

2. On a : $$y' = h\,y_1 + H\,y_1' + k\,y_2 + K\,y_2'$$

   Or, $h\,y_1 + k\,y_2 = 0$, donc : $$y' = H\,y_1' + K\,y_2'$$

   D'où $$y'' = h\,y_1' + H\,y_1'' + k\,y_2' + K\,y_2''$$

   Or, $h\,y_1' + k\,y_2' = c$, d'où :

$$y'' = c + H(-a\,y_1' - b\,y_1) + K(-a\,y_2' - b\,y_2) = c - a(H\,y_1' + K\,y_2') - b(H\,y_1 + K\,y_2) = c - a\,y' - by$$

   Donc $y \in S(I)$.

<u>Exemples 1</u> : Résoudre $$(E) : y'' + y = \frac{1}{\cos t} \quad \text{sur} \quad I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$t \longmapsto A\cos t + B\sin t \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Résolvons le système : $$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h(t) \\ k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$$

On trouve : $$h(t) = -\tan t \quad \text{et } k(t) = 1$$

D'où : $$H(t) = \ln(\cos t) \quad \text{et} \quad K(t) = t$$

Une solution particulière est : $$y(t) = \ln(\cos t)\cos t + t\sin t$$

D'où : $$S(I) = \left\{y : t \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto (A + \mathbf{e}^t\ \ln(\cos t))\cos t + (B + t)\,\text{sint}\ t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exemple 2 : Résoudre $(E) : t^2 y'' + ty' - y = 2t$ sur $I =]0, +\infty[$

La solution générale de l'équation sans second membre (équation d'Euler) est :

$$t \longmapsto A\,t + \frac{B}{t} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

L'équation normalisée est : $$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{2}{t}$$

Résolvons le système : $$\begin{pmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

On trouve : $$h(t) = \frac{1}{t} \text{ et } k(t) = -t$$

D'où : $$H(t) = \ln t \text{ et } K(t) = -\frac{1}{2}t^2$$

Une solution particulière est : $$y(t) = t\ln t - \frac{t}{2}$$

D'où : $$S(I) = \{y : t \in]0, +\infty[\longmapsto A'\,t + \frac{B}{t} + t\ln t \quad (A', B) \in \mathbb{R}^2\}$$

4.2. Étudions le cas des équations différentielles à **coefficients a et b constants** avec un second membre particulier :

$$(E) : y'' + a\,y' + b\,y = c \text{ avec } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } c \in C(I) \text{ "simple"}$$

4.2.1. Théorème Cas d'un second membre polynomial

$$(E) : y'' + a\,y' + b\,y = P \text{ avec } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } P \in \mathbb{K}[X]$$

Notons $n = \deg P$. Il existe une unique fonction polynomiale Q de degré n tel que :

- $t \longmapsto Q(t)$ solution de (E) si $b \neq 0$.
- $t \longmapsto t\,Q(t)$ solution de (E) si $b = 0$ et $a \neq 0$
- $t \longmapsto t^2\,Q(t)$ solution de (E) si $b = a = 0$.

Démonstration :

- Supposons $b \neq 0$.

  Considérons l'endomorphisme $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ Q & \longmapsto & Q'' + a\,Q' + b\,Q \end{array}$$

  On a Ker $\varphi = \{0\}$ car les solutions non nulles de $(E_0) : y'' + a\,y' + b\,y = 0$ ne sont pas polynomiales (2.3.)

  Donc φ est bijectif. Donc, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $P = \varphi(Q)$

  C'est-à-dire : $$Q'' + a\,Q' + b\,Q = P$$

  Il existe donc une unique solution particulière polynomiale Q.

  Enfin, le degré de Q est le même que celui de $Q'' + a\,Q' + b\,Q = P$, donc égal à n.

- Supposons $b = 0$ et $a \neq 0$. L'équation (E) s'écrit : $y'' + a\,y' = P$

  Considérons l'endomorphisme
  $$\varphi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$$
  $$R \longmapsto R' + a\,R$$

  On a Ker $\varphi = \{0\}$ car les solutions non nulles de $y' + a\,y = 0$ ne sont pas polynomiales.

  Donc φ est bijectif. Donc, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $R \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $P = \varphi(R)$

  C'est-à-dire : $$R' + a\,R = P$$

  Et on a nécessairement : deg $R = n$.

  Soit y une solution polynomiale de (E) : $$y'' + a\,y' = P$$

  Donc $$y'' + ay' = R' + a\,R$$

  Par injectivité de φ, on a : $$y' = R$$

  Donc y est une primitive de R. Il en existe une seule qui s'annule en 0, donc de la forme :
  $$y(t) = t\,Q(t) \text{ avec deg } Q = n$$

  Comme y est unique, Q l'est également.

- Supposons $b = a = 0$. L'équation (E) s'écrit : $y'' = P$

  Donc y est une fonction polynomiale de degré $n + 2$. (Obtenue par double primitive de P)

  Il en existe une seule vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, c'est-à-dire de la forme :
  $$y(t) = t^2\,Q(t) \text{ avec deg } Q = n$$

  Comme y est unique, Q l'est également.

Dans la pratique, on identifie les coefficients (en remplaçant dans (E)) pour déterminer Q.

<u>4.2.2. Théorème</u> Cas d'un second membre en "exponentielle-polynôme"

$$(E) : y'' + a\,y' + b\,y = \mathbf{e}^{st}\,P(t) \text{ avec } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } P \in \mathbb{K}[X]$$

Notons $n = \deg P$. Il existe une unique fonction polynomiale Q de degré n tel que :

- $t \longmapsto Q(t)\,\mathbf{e}^{st}$ solution de (E) si s n'est pas racine de l'équation caractéristique (ξ) : $r^2 + a\,r + b = 0$
- $t \longmapsto t\,Q(t)\,\mathbf{e}^{st}$ solution de (E) si s est racine simple de (ξ)
- $t \longmapsto t^2\,Q(t)\,\mathbf{e}^{st}$ solution de (E) si s est racine double de (ξ).

<u>Démonstration</u> :

Posons : $$y(t) = z(t)\,\mathbf{e}^{st}$$

On a alors : $$y'(t) = (z'(t) + s\,z(t))\,\mathbf{e}^{st}$$
$$y''(t) = (z''(t) + 2s\,z'(t) + s^2\,z(t))\,\mathbf{e}^{st}$$

En remplaçant de (E) : $$z'' + (2s + a)\,z' + (s^2 + a\,s + b)\,z = P$$

On applique alors 4.2.1.

<u>Remarque</u> : pour toute équation de la forme :
$$y'' + a\,y' + b\,y = \mathbf{e}^{st}\,f(t)$$
le fait de poser $y(t) = z(t)\,\mathbf{e}^{st}$ donne une équation en z plus simple.

4.2.3. Théorème Principe de superposition

Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_i des équations différentielles :

$$(E_i) : y'' + a\, y' + b\, y = c_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ où } c_i \in C(I)$$

Alors, $\sum_{i=1}^{n} y_i$ est une solution particulière de l'équation :

$$(E) : y'' + a\, y' + b\, y = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Démonstration :

Immédiat par linéarité de la dérivée.

Exemple : résoudre $(E) : y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch} t$ sur $I = \mathbb{R}$

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y_0(t) = A\,\mathbf{e}^{2t} + B\,\mathbf{e}^{t}$$

Cherchons une solution particulière de : $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}^{t}$

Comme $s = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, on recherche une solution particulière y_1 sous la forme :

$$y_1(t) = K\,t\,\mathbf{e}^{t}$$

$$y_1'(t) = K(t+1)\,\mathbf{e}^{t}$$

$$y_1''(t) = K(t+2)\,\mathbf{e}^{t}$$

En remplaçant dans (E_1), on obtient : $K = -\dfrac{1}{2}$

D'où : $y_1(t) = -\dfrac{1}{2}\,t\,\mathbf{e}^{t}$

Cherchons une solution particulière de : $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-t}$

Comme $s = -1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière y_2 sous la forme :

$$y_2(t) = K\,\mathbf{e}^{-t}$$

$$y_2'(t) = -K\,\mathbf{e}^{-t}$$

$$y_2''(t) = K\,\mathbf{e}^{-t}$$

En remplaçant dans (E_2) : $K = \dfrac{1}{12}$

D'où : $y_2(t) = \dfrac{1}{12}\,\mathbf{e}^{-t}$

D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est :

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,t\,\mathbf{e}^{t} + \frac{1}{12}\,\mathbf{e}^{-t}$$

D'où : $S(\mathbb{R}) = \{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\,\mathbf{e}^{2t} + (B - \frac{1}{2}t)\,\mathbf{e}^{t} + \frac{1}{12}\,\mathbf{e}^{-t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

5. Appendice

5.1. À propos des conditions de Cauchy

Il est indispensable d'avoir deux conditions du type $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ (ce qu'on appelle des conditions de Cauchy) pour s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution. Si tel n'est pas le cas, le nombre de solutions peut être très variable (de 0 à l'infini...)

Exemple 1 : résoudre sur $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{y'' + \pi^2 y = 0}$ **avec** $\boldsymbol{y(0) = 0}$ **et** $\boldsymbol{y'(0) = 0}$

(Conditions de Cauchy)

L'équation caractéristique est $r^2 + \pi^2 = 0$ qui possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \mathbf{i}\pi$ et $r_2 = -\mathbf{i}\pi$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par : $y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

En dérivant, on obtient : $y'(x) = -A\,\pi\sin(\pi x) + B\,\pi\cos(\pi x)$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ nous donnent : $0 = A$ et $0 = B$.

Conformément au théorème de Cauchy-Lipschitz, on a bien une unique solution $y = 0$.

Exemple 2 : résoudre sur $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{y'' + \pi^2 y = 0}$ **avec** $\boldsymbol{y(0) = 0}$ **et** $\boldsymbol{y(1) = 0}$

(Ce ne sont pas des conditions de Cauchy, mais de Dirichlet)

Comme précédemment, les solutions (s'il y en a) sont de la forme : $y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

La condition $y(0) = 0$ donne $0 = A$ et la condition $y(1) = 0$ donne $0 = -A$, donc $A = 0$.

Et il n'y a aucune contrainte sur la constante B, donc l'équation admet une infinité de solution de la forme :

$$y(x) = B\sin(\pi x).$$

Exemple 3 : résoudre sur $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{y'' + \pi^2 y = 0}$ **avec** $\boldsymbol{y(0) = 0}$ **et** $\boldsymbol{y(1) = 1}$

(Ce ne sont pas des conditions de Cauchy, mais de Dirichlet)

Comme précédemment, les solutions (s'il y en a) sont de la forme : $y(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

La condition $y(0) = 0$ donne $0 = A$ et la condition $y(1) = 1$ donne $-1 = A$, d'où une incompatibilité.

L'équation donnée avec les conditions proposées n'admet donc pas de solution.

5.2. Lemme de Gronwall

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, φ et $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ positives et continues. On suppose :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [a, b],\ \varphi(t) \leqslant C + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b],\ \varphi(t) \leqslant C\,\mathbf{e}^{\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s}$$

Démonstration :

Posons

$$G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \left(\int_a^u \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s}$$

Comme les applications φ et ψ sont continues, on en déduit que G est de classe C^1 sur $[a, b]$ (primitives obtenues par des intégrales à borne supérieure variable dont l'intégrande est continue) et :

$$\forall u \in [a, b],\ G'(u) = \varphi(u)\,\psi(u)\,\mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s} - \psi(u)\left(\int_a^u \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s}$$

$$\forall u \in [a, b],\ G'(u) = \psi(u)\ \mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s} \left(\varphi(u) - \int_a^u \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Or, par hypothèse : $\forall u \in [a, b],\ \varphi(u) \leqslant C + \int_a^u \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s$

Donc : $\forall u \in [a, b],\ G'(u) \leqslant C\,\psi(u)\ \mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s}$

Soit $t \in [a, b]$. En intégrant cette inégalité pour u allant de a et t :

$$G(t) - G(a) \leqslant C \int_a^t \psi(u)\,\mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u$$

Par définition de G et comme $G(a) = 0$:

$$\left(\int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s\right) \mathbf{e}^{-\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s} \leqslant C \left[-\,\mathbf{e}^{-\int_a^u \psi(s)\,\mathrm{d}s}\right]_a^t \leqslant -C\,\mathbf{e}^{-\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s} + C\,\mathbf{e}^0$$

D'où : $\left(\int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant -C + C\,\mathbf{e}^{\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s}$

Et finalement $\varphi(t) \leqslant C\ \mathbf{e}^{\int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s}$

<u>Application de lemme de Gronwall</u> :

Soit $p : [0, +\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable.

Montrer que toute solution de l'équation différentielle:

$$(E) : y'' + y = p\,y$$

est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

> Pour des raisons de commodité, on écrit ici une équation différentielle avec un second membre qui dépend de *y* !

On a : $S_0(\mathbb{R}_+) = \{y : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto A\cos t + B\sin t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Recherchons une solution particulière y de (E) par la méthode de la variation des constantes :

On résout : $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h(t) \\ k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t)y(y) \end{pmatrix}$

On trouve, pour $t \in \mathbb{R}_+$: $h(t) = -p(t)\,y(t)\sin t$ et $k(t) = p(t)\,y(t)\cos t$

Choisissons les primitives H et K qui s'annulent en 0 :

$$H(t) = -\int_0^t p(s)\,y(s)\sin s\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad K(t) = \int_0^t p(s)\,y(s)\cos s\,\mathrm{d}s$$

D'où : $y(t) = -\left(\int_0^t p(s)\,y(s)\sin s\,\mathrm{d}s\right)\cos t + \left(\int_0^t p(s)\,y(s)\cos s\,\mathrm{d}s\right)\ \mathrm{sint}\ t$

$$y(t) = \int_0^t p(s)\,y(s)\sin(t - s)\,\mathrm{d}s$$

Donc, si φ est une solution quelconque de (E), alors :

$$\varphi(t) = A\cos t + B\sin t + \int_0^t p(s)\,\varphi(s)\sin(t - s)\,\mathrm{d}s$$

D'où : $$|\varphi(t)| \leqslant |A| + |B| + \int_0^t |p(s)|\,|\varphi(s)|\,\mathrm{d}s$$

Et d'après le lemme de Gronwall :

$$\varphi(t) \leqslant (|A| + |B|)\,\mathbf{e}^{\int_0^t |\varphi(s)|\,\mathrm{d}s} \leqslant (|A| + |B|)\,\mathbf{e}^{\int_0^{+\infty} |\varphi(s)|\,\mathrm{d}s}$$

Conclusion : φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$

5.3. Énoncé et démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire vectoriel d'ordre 1

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1

Soient :

- I un intervalle non vide et non réduit à un point.
- $p \in \mathbb{N}^*$
- $A \in C(I, M_p(\mathbb{K}))$

  (A est représentée par une matrice carrée dont les coefficients sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$),
- $B \in C(I, \mathbb{K}^p)$

  (B est représentée par un vecteur colonne dont les coefficients sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$).
- $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^p$.

Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :

$$Y' = AY + B \quad \text{et} \quad Y(t_0) = Y_0$$

On parle d'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre (ou de système différentiel linéaire du premier ordre) défini(e) par une condition initiale.

Démonstration :

Déjà, remarquons qu'une application Y (de I dans $\mathbb{K}^p$) vérifiant $Y' = AY + B$ est nécessairement de classe C^1 (car A et B sont continues)

On commence par transformer l'équation vectorielle en une équation intégrale.

Si Y est une solution du problème de Cauchy, alors pour tout $t \in I$, on obtient en intégrant l'équation $Y'(u) = A(u)Y(u) + B(u)$ pour u allant de t_0 à t :

$$\forall t \in I,\ \ Y(t) - Y(t_0) = \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$$

Et tenant compte de la condition initiale $Y(t_0) = Y_0$:

$$\forall t \in I,\ \ Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$$

Réciproquement, toute application Y de classe C^1 vérifiant l'équation ci-dessus est solution du problème du Cauchy.

On a donc l'équivalence :

$$(Y' = AY + B \ \text{ et } \ Y(t_0) = Y_0) \iff Y = Y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$$

On suppose que I est un segment $[a, b]$

Notons $E = C(I, \mathbb{K}^p)$. (E est l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{K}^p$)

On rappelle que E muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

En effet, comme I est un segment, les éléments de E sont des applications **bornées**. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geqslant q \geqslant N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon)$$

Pour un tel rang N, on a alors :

$$\forall x \in I, (p \geqslant q \geqslant N \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\|_\infty \leqslant \varepsilon)$$

La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}^p$ complet donc converge vers un élément $f(x) \in \mathbb{K}^p$.

On définit ainsi une application $f \in C(I, \mathbb{K}^p)$.

f est bien continue car limite uniforme d'applications continues puisque en faisant tendre q vers $+\infty$, on a :

$$\|f - f_p\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

De plus, f est bornée puisque : $\quad \|f\|_\infty \leqslant \|f - f_p\|_\infty + \|f_p\|_\infty$

On a bien prouvé que E est **complet**. C'est donc un espace de Banach.

Revenons à la démonstration du théorème de Cauchy-Lipchitz.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to E \\ F &\mapsto \Phi(F) : I \to \mathbb{K}^p \\ &\qquad\qquad t \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)F(u) + B(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Pour intégrer un vecteur, on intègre chaque coordonnée.

(Φ est bien définie puisque $\Phi(F)$ est continue (car dérivable) sur I)

Montrons que Φ admet un unique point fixe.

Soient F et G deux éléments de E :

$$\Phi(F)(t) - \Phi(G)(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)(F(u) - G(u))\,\mathrm{d}u$$

D'où : $$\|\Phi(F)(t) - \Phi(G)(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(u)(F(u) - G(u))\|\,\mathrm{d}u \right|$$

Comme $M_p(\mathbb{K})$ est de dimension finie, les normes d'applications linéaires sont continues, donc :

$$\|A(u)(F(u) - G(u))\| \leqslant \|A(u)\|\,\|F(u) - G(u)\|$$

Or, $A(u) \in M_p(\mathbb{K})$, donc en notant $A(u) = (a_{ij}(u))$, on a : $\|A(u)\| = \max\limits_{i,j} |a_{ij}(u)| \leqslant \max\limits_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty$.

En posant $k = \max\limits_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty$, on obtient : $\|\Phi(F)(t) - \Phi(G)(t)\| \leqslant k\,|t - t_0|\,\|F - G\|_\infty$

Montrons par récurrence la propriété :

$$\wp(n) : \|\Phi^n(F)(t) - \Phi^n(G)(t)\| \leqslant \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} \|F - G\|_\infty$$

On vient de voir que l'on a $\wp(1)$.

Supposons $\wp(n)$, alors :

$$\|\Phi^{n+1}(F)(t) - \Phi^{n+1}(G)(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(u)(\Phi^n(u) - \Phi^n(u))\|\,\mathrm{d}u \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k \frac{k^n |u - t_0|^n}{n!} \|F - G\|_\infty \,\mathrm{d}u \right|$$

$$\|\Phi^{n+1}(F)(t) - \Phi^{n+1}(G)(t)\| \leqslant \frac{k^{n+1}|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)\,!}\|F - G\|_\infty$$

Ce qui est $\wp(n+1)$. Du principe de récurrence, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \wp(n)$.

En passant à la borne supérieure pour $t \in [a, b]$, on obtient :

$$\|\Phi^n(F) - \Phi^n(G)\|_\infty \leqslant \frac{k^n|b - a|^n}{n\,!}\|F - G\|_\infty$$

Comme la quantité $\dfrac{k^n|b - a|^n}{n\,!}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, il existe un entier N pour lequel :

$$\frac{k^N|b - a|^N}{N\,!} \leqslant 1$$

En conséquence, Φ^N est **contractante**.

Comme E est **complet** (et **fermé**), le **théorème du point fixe** permet d'affirmer que Φ^N admet un unique point fixe $Y \in E$.

On a alors : $$\Phi^N(\Phi(Y)) = \Phi(\Phi^N(Y)) = \Phi(Y)$$

Par unicité du point fixe de Φ^N, on en déduit : $\Phi(Y) = Y$

Donc Φ admet un point fixe Y.

Si Z était un autre point fixe de Φ alors Z serait point fixe de Φ^N et donc $Z = Y$.

En conséquence, Φ admet un unique point fixe Y.

Il existe donc un unique Y tel que $Y = Y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)Y(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$, ce qui démontre le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1 sur un segment.

On suppose maintenant que I est un intervalle quelconque (non vide et non réduit à un point)

On construit alors une suite croissante de segments $[a_n, b_n]$ contenant t_0 dont la réunion est I.

D'après ce qui précède, il existe une unique solution Y_n au problème de Cauchy sur $[a_n, b_n]$.

Et par unicité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de Y_{n+1} à $[a_n, b_n]$ coïncide avec Y_n.

On définit alors : $$Y(t) = Y_n(t) \text{ si } t \in [a_n, b_n]$$

On a ainsi construit une solution du problème de Cauchy sur I.

Reste à prouver l'unicité : soit Z une autre solution du problème de Cauchy sur I, alors il existe un réel $t_1 \in I$ tel que $Z(t_1) \neq Y(t_1)$, ce qui contredit le théorème de Cauchy-Lipschitz sur un segment contenant t_1.