EXEMPLES D'EMPLOI DE SÉRIES ENTIÈRES OU TRIGONOMÉTRIQUES POUR LA RECHERCHE DE SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$$

   a) Rechercher une solution φ de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R. Exprimer φ avec les fonctions usuelles.

   b) Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $I =]-\infty, 0[$, puis sur $J =]0, +\infty[$.

   c) Déduire des questions a) et b) l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$$

   Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. (Méthode libre...)

*Commentaires sur cet exercice : on résout ici une équation **sans second membre**. On commence par rechercher une solution sur $\mathbb{R}$ développable en série entière. On en déduit les solutions de (E) sur des intervalles ou l'équation est normalisable. Enfin, on étudie les conditions que doivent satisfaire les différentes constantes pour obtenir un raccord en 0.*

Dans cet exercice, l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

1. Déterminer une solution f de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R.

   Exprimer f avec les fonctions usuelles.

2. Vérifier que l'application $g : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est une solution de E sur $\mathbb{R}^*$.

   En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$.

*Commentaires sur cet exercice : on résout ici une équation **avec second membre**. Contrairement à l'exercice précédent, l'équation sans second membre n'admet pas de solutions développables en séries entières (essayez...). Par contre, l'équation avec second membre en admet une. Connaissant une autre solution particulière g, on peut en déduire (par différence f - g) une solution φ de l'équation sans second membre et donc toutes les solutions.*

Dans cet exercice, l'espace affine des solutions sur $\mathbb{R}^*$ est de dimension 2.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$$

1. On considère l'équation sans second membre :

$$(E_0) : x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

   Déterminer les solutions de (E_0) sur $]0, +\infty[$.

2. Rechercher une solution particulière f de (E) développable en série entière au voisinage de 0.

   Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

3. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

*Commentaires sur cet exercice : on résout ici une équation du type "**Euler**".*

Dans cet exercice, l'espace affine des solutions sur $]0, +\infty[$ est de dimension 2.

Exercice 4

Trouver un développement en série entière au voisinage de 0 des applications suivantes :

$$f : x \mapsto \mathbf{e}^{x^2} \int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

(On montrera que f vérifie le problème différentiel suivant : $y' - 2xy = 1$ et $y(0) = 0$)

$$g : x \mapsto (\arcsin x)^2 \qquad (x \in \,]-1, 1[)$$

(On montrera que g vérifie le problème différentiel suivant : $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$)

$$h : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in \,]-1, 1[)$$

(Méthode libre ...)

*<u>Commentaires sur cet exercice</u> : on recherche dans cet exercice des **développements en série entière** de fonctions données. La technique consiste à déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction. On résout ces équations en recherchant des solutions développables en série entière...*

*Dans le premier cas, on obtient une expression de la **fonction "erreur" de Gauss**.*

Exercice 5

On considère l'équation différentielle : $(E) : y''(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}\, y(t) = 0$

On note f une (éventuelle) solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer : f est 2π-périodique $\Leftrightarrow$ $(\, f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)\,)$
2. On suppose, de plus, que f est 2π-périodique.
   a) Justifier que la série de Fourier de f converge uniformément, sur $\mathbb{R}$, vers f :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

   b) Calculer les coefficients de Fourier de f'' en fonction de ceux de f.
   En déduire une relation de récurrence entre les coefficients $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$.

   c) Calculer $c_{-1}(f)$. En déduire une expression de f sous la forme d'une somme d'une série.

*<u>Commentaire sur cet exercice</u> : On recherche ici une solution 2π-périodique développable en **série trigonométrique** d'une équation comportant un **coefficient complexe**.*

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad t \longmapsto |\sin t|$

1. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f et préciser la convergence de sa série de Fourier.
2. On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' + y = |\sin x|$
   a) Montrer que (E) admet une unique solution π-périodique sur $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

*<u>Commentaire sur cet exercice</u> : on étudie ici une équation différentielle en recherchant une solution particulière développable en **série trigonométrique**.*

AVERTISSEMENT :

Considérons l'énoncé suivant :

Résoudre l'équation (E) : $x^2 + 1 = 0$

Et imaginons la solution suivante :

Soit x une solution réelle de (E).

D'une part, (E) peut s'écrire : $(x+1)^2 - 2x = 0$

$$(x+1)^2 = 2x$$

Or, x étant réel, on a : $0 \leqslant (x+1)^2$

D'où : $\underline{x \geqslant 0}$

D'autre part, (E) peut s'écrire : $(x-1)^2 + 2x = 0$

$$(x-1)^2 = -2x$$

D'où : $\underline{x \leqslant 0}$

On en déduit alors : $\boldsymbol{x = 0}$

Dans le raisonnement ci-dessus, on aboutit à une valeur de x qui n'est pas une solution de (E).
Pourquoi ? Car l'hypothèse de départ ("soit x une solution réelle") est bien sûr fausse.
Or, lorsqu'on recherche une solution d'une équation différentielle sous forme de série entière, on est parfois amené a écrire : "soit f une solution de l'équation différentielle développable en série entière de rayon de convergence $R > 0$". Mais, à ce stade, on ne sait pas si une telle solution existe ! Pourtant, on va effectuer des calculs et arriver, peut être, à une "solution" f (comme dans l'exemple ci-dessus)... **Il faut bien comprendre qu'il s'agit d'un raisonnement par implication (si il y a une solution dSE, c'est ...). Il est donc indispensable d'étudier la RÉCIPROQUE (i.e. se poser la question : la fonction f trouvée vérifie-t-elle effectivement l'équation différentielle ?)**

Exercice 1

1. a) Supposons qu'il existe une série entière φ de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Notons : $$\varphi(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

Le théorème de dérivation d'une série entière permet d'écrire, pour tout $x \in\ ]-R, R[$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

$$\varphi''(x) = \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Comme on a supposé φ solution de (E) sur $]-R, R[$, on a :

$$4x \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = 0$$

Soit, par réindexation : $\sum_{n\geqslant 1} 4(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n\geqslant 0} 2(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = 0$

$$2a_1 - a_0 + \sum_{n\geqslant 1}((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n)x^n = 0$$

Et par unicité des coefficients d'une série entière :

$$a_1 = \frac{a_0}{2} \text{ et } a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

On en déduit par récurrence facile : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$

Ainsi, il apparaît que si (E) admet des solutions développables en séries entières, elles forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par φ définie par :

$$\forall x \in\ ]-R, R[,\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Calculons le rayon de convergence de φ :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'après le test de D'Alembert, on a donc $R = +\infty$.

Exprimons φ avec les fonctions usuelles :

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Le rayon de convergence de ces séries entières étant infini, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{ch}\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-,\ \cos\sqrt{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

D'où, pour $\lambda = 1$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On remarque que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi^{(n)}(0) = n!\, a_n = \frac{n!}{(2n)!}.$$

Enfin, on vérifie que φ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$4x\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{ch}\sqrt{x}\right) + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}\right) - \operatorname{ch}\sqrt{x} = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}_-$,

$$4x\left(\frac{1}{4(-x)\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cos\sqrt{-x}\right) + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}\right) - \cos\sqrt{-x} = 0$$

b) <u>Résolution de (*E*) sur $J =]0, +\infty[$</u> :

Soit y une solution quelconque de (E) sur J. (On sait qu'il en existe d'après a))

Posons $y = z\varphi$ et recherchons une équation différentielle (E') vérifiée par z. (Méthode de Lagrange)

On a :
$$y' = z'\varphi + z\varphi'$$
$$y'' = z''\varphi + 2\,z'\varphi' + z\varphi''$$

En remplaçant dans (E) : $4x(z''\varphi + 2\,z'\varphi' + z\varphi'') + 2(z'\varphi + z\varphi') - z\varphi = 0$

Et comme φ est solution de (E) : $4x(z''\varphi + 2\,z'\varphi') + 2(z'\varphi) = 0$
$$4x\varphi z'' + (8x\varphi' + 2\varphi)z' = 0$$

Et comme, sur J, on a : $\varphi(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ (et donc $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (\operatorname{sh}\sqrt{x}\,)$)

On obtient :
$$4x\operatorname{ch}\sqrt{x}\;z'' + \left(8x\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\operatorname{sh}\sqrt{x}\,) + 2\operatorname{ch}\sqrt{x}\,\right)z' = 0$$

Et comme $x > 0$, on obtient (E') : $z'' + \left(\dfrac{\operatorname{th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x}\right)z' = 0$

Remarquons que : $\dfrac{\operatorname{th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2 \times \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\operatorname{ch}\sqrt{x}} = 2\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

Donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est $x \longmapsto 2\ln(u(x)) = 2\ln(\operatorname{ch}\sqrt{x}\,)$

D'où l'on déduit :
$$z'(x) = K\,\mathbf{e}^{-2\ln(\operatorname{ch}\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln x} = \frac{K}{(\operatorname{ch}\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$$

Remarquons que : $\dfrac{1}{(\operatorname{ch}\sqrt{x})^2\sqrt{x}} = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{(\operatorname{ch}\sqrt{x})^2} = 2\,u'(x) \times \dfrac{1}{\operatorname{ch}(u(x))^2}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$

Donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(\operatorname{ch}\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$ est $x \longmapsto 2\operatorname{th}(u(x)) = 2\operatorname{th}\sqrt{x}$

D'où l'on déduit :
$$z(x) = 2K\operatorname{th}\sqrt{x} + H$$

Puis :
$$y(x) = z(x)\,\varphi(x) = (2K\operatorname{th}\sqrt{x} + H)\operatorname{ch}\sqrt{x}$$
$$y(x) = 2K\operatorname{sh}\sqrt{x} + H\operatorname{ch}\sqrt{x}$$

En posant $A = H$ et $B = 2K$, on obtient finalement la solution générale de E sur J :
$$y(x) = A\operatorname{ch}\sqrt{x} + B\operatorname{sh}\sqrt{x}$$

<u>Résolution de (*E*) sur $I =]-\infty, 0[$</u> :

La méthode précédente ne pourrait pas s'appliquer ici avec $\varphi(x) = \cos\sqrt{-x}$ car l'équation différentielle (E') vérifiée par z ne serait pas normalisable... (Car $\cos\sqrt{-x}$ possède une infinité de 0).

On propose ici une autre méthode (qui, elle, était aussi applicable sur J). Le changement de fonction :

Posons :
$$z :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto y(-t^2)$$

Ainsi, pour $x \in I$:
$$y(x) = z(\sqrt{-x}\,)$$
$$y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}\,z'(\sqrt{-x}\,)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{4x} z''(\sqrt{-x}) + \frac{1}{4x\sqrt{-x}} z'(\sqrt{-x})$$

En remplaçant dans (E) :

$$-z''(\sqrt{-x}) + \frac{1}{\sqrt{-x}} z'(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}} z'(\sqrt{-x}) - z(\sqrt{-x}) = 0$$

C'est-à-dire : $z''(t) + z(t) = 0$

D'où l'on obtient : $z(t) = C \cos t + D \sin t$

$$y(x) = C \cos\sqrt{-x} + D \sin\sqrt{-x}$$

c) Raccords

Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.

Continuité de y : $y(0^+) = y(0^-)$ entraîne ($A = C$ et $y(0) = A$)

Continuité de y' : $y'(x) = \frac{A \operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{B \operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ si $x > 0$

$$y'(x) = \frac{A \sin\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} - \frac{D \cos\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}$$

Or, $\lim_{x\to0^+} \frac{A \operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{A}{2}$ et $\lim_{x\to0^-} \frac{A \sin\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} = \frac{A}{2}$

Par contre les applications $x \mapsto \frac{B \operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{D \cos\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}$ n'admettent de limites en 0 (respectivement à droite et à gauche) que si $B = D = 0$. De plus, nécessairement : $y'(0) = \frac{A}{2}$.

On a donc, à ce stade : $y(x) = A \operatorname{ch}\sqrt{x}$ si $x > 0$ et $y(x) = A \cos\sqrt{-x}$ si $x < 0$ et $y(0) = A$

Donc $y = A\varphi$ (où φ est la fonction de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}$ vue à la question a))

Bilan :

L'espace vectoriel des solutions de E est de dimension 1 et :

$$y \text{ solution de } (E) \iff y(x) = \begin{cases} A \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ A & \text{si } x = 0 \\ A \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}$$

2. (E) : $xy'' + 2y' + xy = 0$

On pourrait procéder comme ci-dessus mais il y a bien plus simple !

Posons : $Y = xy$

Ainsi : $Y' = y + xy'$

$$Y'' = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'' = -xy = -Y$$

On a donc : $Y(x) = A \cos x + B \sin x$

D'où :

Pour $x > 0$: $y(x) = A\frac{\cos x}{x} + B\frac{\sin x}{x}$

Pour $x < 0$: $y(x) = C\frac{\cos x}{x} + D\frac{\sin x}{x}$

Raccords :

La continuité de y entraîne :

$$A = C = 0 \text{ (car } x \mapsto \frac{\cos x}{x} \text{ n'a pas de limite en 0) et } B = D \text{ (car } y(0^+) = y(0^-))$$

Les expressions de y sont maintenant les mêmes sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Donc les dérivées suivantes (qui existent) se raccordent automatiquement.

L'espace vectoriel des solutions est donc de dimension 1 et :

$$y(x) = \begin{cases} A\dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ A \text{ si } x = 0 \end{cases}, \ A \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

1. Supposons qu'il existe une série entière f de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Notons :
$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

Le théorème de dérivation d'une série entière permet d'écrire, pour tout $x \in \ ]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Comme on a supposé f solution de (E) sur $]-R, R[$, on a :

$$x^2 \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} + (2 - x^2)\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 2} a_{n-2} x^n = 1$$

$$2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} [n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}] = 1$$

Et par unicité des coefficients d'une série entière :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \text{ pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

On en déduit, par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p-1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{1}{(2p+2)!}$

D'où :
$$\forall x \in \ ]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Calculons le rayon de convergence de f :

On a $f(0) = a_0 = \dfrac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ **fixé**. Notons : $$u_n = \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = x^2 \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'après le test de D'Alembert pour les séries numériques, la série converge.

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on en déduit : $R = +\infty$.

Enfin, on vérifie que f est bien solution de (E) :

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4xf'(x) + (2 - x^2)f(x) &= x^2 \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - x^2 \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n\geqslant 1} na_n x^n + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 2} a_{n-2}x^n \\ &= 1 + \sum_{n\geqslant 2}[n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}] = 1 \end{aligned}$$

Exprimons f avec les fonctions usuelles :

$$\forall x \in\ ]-R, R[\setminus \{0\},\ f(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

2. g est C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et : $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{2}{x^3}\ ;\ g''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

On a alors : $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 g''(x) + 4xg'(x) + (2 - x^2)g(x) = -\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^2} - \frac{2}{x^2} + 1 = 1$$

g est bien solution de E sur $\mathbb{R}^*$.

f et g sont donc deux solutions particulières, sur $\mathbb{R}^*$, de l'équation avec second membre (E).

Donc la fonction différence ($\varphi = f - g$) est solution, sur $\mathbb{R}^*$, de l'équation sans second membre (E_0).

On applique alors la méthode de Lagrange pour trouver toutes les solutions de (E_0) :

Posons $y = z\varphi$ et recherchons une équation différentielle (E') vérifiée par z.

On a : $$y' = z'\varphi + z\varphi'$$
$$y'' = z''\varphi + 2z'\varphi' + z\varphi''$$

En remplaçant dans (E_0) : $x^2(z''\varphi + 2z'\varphi' + z\varphi'') + 4x(z'\varphi + z\varphi') - (2 - x^2)z\varphi = 0$

Et comme φ est solution de (E_0) : $x^2(z''\varphi + 2z'\varphi') + 4x(z'\varphi) = 0$

Et comme : $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} \text{ et } \varphi'(x) = \frac{x^2 \operatorname{sh} x - 2x\operatorname{ch} x}{x^4} = \frac{x\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}{x^3}$$

On a : $$\operatorname{ch} x\, z'' + 2\operatorname{sh} x\, z' = 0$$

Et comme $\operatorname{ch} x > 0$: $$z'' + 2\operatorname{th} x\, z' = 0$$

$$z'(x) = A\,\mathbf{e}^{-2\ln(\operatorname{ch} x)} = \frac{A}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$z(x) = A\operatorname{th} x + B$$

D'où finalement, la solution générale de (E_0) :

$$y(x) = \frac{A\operatorname{sh} x + B\operatorname{ch} x}{x^2}$$

Et la solution générale de E :

$$S(\mathbb{R}^*) = \{y : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{A\,\text{sh}\,x + B\,\text{ch}\,x - 1}{x^2},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 3

1. Il s'agit d'une équation d'Euler. (Voir le cours sur les équations différentielles pour la théorie générale)

   On recherche des solutions sous la forme $y(x) = x^r$, avec $r \in \mathbb{C}$.

   On a alors : $$x^2\, r(r-1)x^{r-2} + 4x\, r\, x^{r-1} + 2\, x^r = 0$$

   Et comme $x > 0$: $$(r^2 - r) + 4r + 2 = 0$$

   On obtient l'équation caractéristique d'Euler :

   $$(\zeta) : r^2 + 3r + 2 = 0$$

   $$(r+1)(r+2) = 0$$

   On trouve deux solutions :

   $$y_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

   Ces deux solutions sont indépendantes (leur Wronskien est : $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}(x) = -\frac{1}{x^4} \neq 0$)

   D'où une base de (E_0) : $$\left(x \mapsto \frac{1}{x}\ ; x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$$

2. **Méthode 1 : utilisation d'une série entière**

   Supposons qu'il existe une série entière f de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   Notons : $$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

   Le théorème de dérivation d'une série entière permet d'écrire, pour tout $x \in\ ]-R, R[$:

   $$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

   $$f''(x) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

   Comme on a supposé f solution de (E) sur $]-R, R[$, on a :

   $$x^2 \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \ln(1+x)$$

   $$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

   $$2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} [n(n-1) + 4n + 2]a_n = x + \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

   Et par unicité des coefficients d'une série entière :

   $$a_0 = 0\ \ ;\ \ a_1 = \frac{1}{6}\ \ ;\ \ \forall n \geqslant 2,\ (n^2 + 3n + 2)a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

   $$a_0 = 0\ \ ;\ \ \forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$$

D'où : $\forall x \in \,]-R, R[,\;\; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$

Comme le coefficient a_n est une fraction rationnelle, on a $R = 1$. (Appliquer le test de D'Alembert)

Exprimons f à l'aide des fonctions usuelles.

Déjà, on a la décomposition en éléments simples suivante :

$$F(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

- $nF(n) \mid n = 0$ donne : $\frac{1}{2} = A$
- $(n+1)F(n) \mid n = -1$ donne : $-1 = B$
- $(n+2)F(n) \mid n = -2$ donne : $\frac{1}{2} = C$

D'où, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2} x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - x\right) + \frac{1}{2x^2}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\ln(1+x) - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}$$

Méthode 2 : variation des constantes

On connaît une base $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\,;\, x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$ de (E_0).

Considérons les fonctions f de la forme :

$$f(x) = \frac{A(x)}{x} + \frac{B(x)}{x^2} \quad \text{où } A, B \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

$$f'(x) = \frac{A'(x)}{x} - \frac{A(x)}{x^2} + \frac{B'(x)}{x^2} - \frac{2B(x)}{x^3}$$

Imposons la condition (C_1) : $\frac{A'(x)}{x} + \frac{B'(x)}{x^2} = 0$, ainsi :

$$f'(x) = -\frac{A(x)}{x^2} - \frac{2B(x)}{x^3}$$

$$f''(x) = -\frac{A'(x)}{x^2} + \frac{2A(x)}{x^3} - \frac{2B'(x)}{x^3} + \frac{6B(x)}{x^4}$$

Remplaçons dans (E) :

$$-A'(x) + \frac{2A(x)}{x} - \frac{2B'(x)}{x} + \frac{6B(x)}{x^2} - \frac{4A(x)}{x} - \frac{8B(x)}{x^2} + \frac{2A(x)}{x} + \frac{2B(x)}{x^2} = \ln(1+x)$$

On obtient (C_2) : $$-A'(x) - \frac{2B'(x)}{x} = \ln(1+x)$$

On résout le système $\{(C_1)\ ;\ (C_2)\}$ d'inconnues A' et B'.

(Ce système s'écrit encore $\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{-1}{x^2} & \frac{-2}{x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x^2} \end{pmatrix}$ et on sait qu'il admet une unique solution car la famille $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\ ; x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$ est libre, ce qui rend légitime d'imposer la condition (C_1)...)

On effectue $x(C_1) + (C_2)$: $$-\frac{B'(x)}{x} = \ln(1+x)$$

$$B'(x) = -x\ln(1+x)$$

Cherchons une primitive à l'aide d'une intégration par parties :

$$B(x) = -\int_1^x t\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^2\ln(1+t)}{2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$$

Or, $$\frac{t^2}{1+t} = \frac{1+2t+t^2}{1+t} - \frac{1+2t}{1+t} = 1 + t - \frac{2+2t}{1+t} + \frac{1}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

$$B(x) = -\frac{x^2\ln(1+x)}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x) \text{ (+ constante)}$$

En choisissant une constante nulle :

$$B(x) = \frac{1-x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

D'autre part : $$A'(x) = -\frac{B'(x)}{x} = \ln(1+x)$$

$$A(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

On en déduit une solution particulière f de (E) :

$$y_p(x) = \frac{A(x)}{x} + \frac{B(x)}{x^2} = \frac{1+x}{x}\ln(1+x) - 1 + \frac{(1-x^2)\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2x}$$

$$y_p(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}$$

3. Solution générale de (E) :

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{3}{4},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 4

$$f : x \mapsto \mathbf{e}^{x^2}\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

f est le produit de $\varphi : x \mapsto \mathbf{e}^{x^2}$ et de la primitive de $\phi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Comme φ et ϕ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, f l'est également et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xf(x) + 1$$

En outre, $f(0) = 0$.

f est donc solution du problème différentiel : $(P) : \begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1 assure l'existence d'une unique solution au problème (P).

Supposons qu'il existe une série entière φ de rayon de convergence $R > 0$ solution de (P) sur $\mathbb{R}$.

Notons :
$$\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

Le théorème de dérivation d'une série entière permet d'écrire, pour tout $x \in\ ]-R, R[$:
$$\varphi'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

Comme on a supposé φ solution de (P) sur $]-R, R[$, on a :
$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} - 2x\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = 1$$
$$\sum_{n\geqslant 0} (n+1)a_{n+1} x^n - 2\sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n = 1$$
$$a_1 + \sum_{n\geqslant 1} [(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}]x^n = 1$$

Comme $\varphi(0) = 0$ et par unicité des coefficients d'une série entière :
$$a_0 = 1\ \ ;\ \ a_1 = 0\ \ ;\ \ \forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} = \frac{2a_{n-1}}{n+1}$$

D'où, par récurrence facile :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0\ \text{ et }\ a_{2p} = \frac{2^{2p}\,p!}{(2p+1)!}$$

Donc :
$$\forall x \in\ ]-R, R[,\ \ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n}$$

On vérifie que le rayon de convergence $R = +\infty$ et que φ est bien solution de (P).

Du théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution de (P)), on déduit :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n}$$

C'est-à-dire :
$$\mathbf{e}^{x^2}\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n}$$

$$g : x \mapsto (\arcsin x)^2 \qquad\qquad (x \in\ ]-1, 1[)$$

g est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ (théorèmes généraux) et :
$$\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \ g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$$
$$g''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\ \arcsin x + \frac{2}{1-x^2}$$

D'où :
$$(1 - x^2)g''(x) = xg'(x) + 2$$

En outre, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

Donc g est solution du problème différentiel (P) :

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-xy'=2 \\ y(0)=0 \ ; \ y'(0)=0 \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une série entière φ de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) sur ℝ.

Un raisonnement analogue aux précédents donne :

$$a_0 = a_1 = 0 \ ; a_2 = 1 \ ; a_3 = 0 \ ; \ \forall n \geqslant 2, \ a_{n+2} = \frac{a_n n^2}{(n+1)(n+2)}$$

Puis : $$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \text{ et } a_{2p} = \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}$$

D'où : $$\forall x \in \ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

On vérifie que φ est solution de (E), que $R = 1$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 2 :

$$\forall x \in \ ]-1, 1[, \ (\arcsin x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

$$h : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in \ ]-1, 1[)$$

h est C^∞ sur]–1, 1[et on remarque que :

$$h(x) = \frac{1}{2} g'(x)$$

D'où, par dérivation termes à termes d'une série entière sur son disque ouvert de convergence :

$$h(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Exercice 5

On considère l'équation différentielle : $(E) : y''(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} y(t) = 0$

Soit f une éventuelle solution de (E) sur ℝ.

1. L'implication " ⇒ " est évidente.

   Montrons l'implication " ⇐ ".

   Supposons : $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$

   Soit g l'application définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \ g(t) = f(t + 2\pi)$

   On a : $$g'(t) = f'(t + 2\pi)$$
   $$g''(t) = f''(t + 2\pi)$$

   On a donc : $g''(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} g(t) = f''(t + 2\pi) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} f(t + 2\pi) = f''(t + 2\pi) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}(t+2\pi)} f(t + 2\pi) = 0$

   En outre, $g(0) = f(2\pi) = f(0)$ et $g'(0) = f'(2\pi) = f'(0)$.

   Donc g (tout comme f) est solution du problème différentiel :

   $$\begin{cases} y''(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} y(t) = 0 \\ y(0) = f(0) \ ; \ y'(0) = f'(0) \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lispchitz linéaire d'ordre 2 (applicable car $t \longrightarrow \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$ est continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit que $g = f$.

Donc f est 2π-périodique.

2. On suppose que f est 2π-périodique.

   a) Comme f est de classe C^2 (car $f''(t) = -\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} f(t)$ et $t \longrightarrow \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$ et f sont continues), le théorème de convergence normale des séries de Fourier assure que la série de Fourier de f converge normalement et donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, vers f.

   b) Comme f est limite uniforme de sa série de Fourier, le théorème de dérivation termes à termes permet d'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}$$

   Comme f est supposée être une solution de (E) :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} = 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)t} = 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-1}(f)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} = 0$$

   Par unicité des coefficients d'une série trigonométrique :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ -n^2 c_n(f) + c_{n-1}(f) = 0$$

   c) On a : $$c_{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f'(2\pi) - f'(0)}{2\pi} = 0$$

   Donc, la relation obtenue en b) donne par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{Z}_-^*,\ c_{n-1}(f) = n^2 c_n(f) = 0$$

   En outre : $$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{f} \text{ (valeur moyenne de } f\text{)}$$

   D'où, par récurrence facile :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n(f) = \frac{c_{n-1}(f)}{n^2} = \frac{c_0(f)}{(n!)^2} = \frac{\overline{f}}{(n!)^2}$$

   Et : $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \overline{f} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{(n!)^2}$$

   Enfin, on vérifie, a posteriori, que f ainsi définie est bien de classe C^2 et solution de (E) :

   Il suffit de poser : $$u_n(t) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{(n!)^2}$$

   On a : $$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{(n!)^2}$$

   Or, la série numérique de terme général $\frac{1}{(n!)^2}$ converge (D'Alembert).

Donc la série d'application de terme général u_n est normalement, donc uniformément convergente.

On peut donc la dériver termes à termes et considérer maintenant la série de terme général u_n' défini par :

$$u_n'(t) = \frac{\mathbf{i}n\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{(n!)^2}$$

On a $\| u_n' \|_\infty = \dfrac{n}{(n!)^2}$ qui est encore le terme général d'une série numérique convergente.

On recommence avec $\qquad u_n''(t) = -\dfrac{n^2\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{(n!)^2}$; $\| u_n'' \|_\infty = \dfrac{n^2}{(n!)^2}$

Et on en conclut que f est C^2.

Enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} f(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{(n!)^2} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt}}{((n-1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)t}}{(n!)^2} = 0$$

Donc f est bien solution de (E).

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad t \longmapsto |\sin t|$

1. On vérifie que f est π-périodique, paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   On a donc (parité) : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 0$

   Et : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t$

   Or : $\qquad \sin A \cos B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(B-A))$ (Euler)

   D'où, après calculs élémentaires : $\qquad a_n = \dfrac{4}{\pi(1-4n^2)}$

   Et en particulier : $\qquad a_0 = \dfrac{4}{\pi}$

   Comme f est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est limite normale, donc uniforme, de sa série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$$

2. a) Supposons qu'il existe une solution g de (E) développable en série trigonométrique telle que g' et g'' s'obtiennent en dérivant termes à termes la série initiale :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)$$

$$g'(t) = \sum_{n\geqslant 1} -n\alpha_n \sin(nt) + n\beta_n \cos(nt)$$

$$g''(t) = \sum_{n\geqslant 1} -n^2\alpha_n \cos(nt) - n^2\beta_n \sin(nt)$$

Comme g est supposée solution de (E) :

$$g''(t) + g(t) = |\sin t|$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (1-n^2)\alpha_n \cos(nt) + (1-n^2)\beta_n \sin(nt) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$$

Par unicité des coefficients :

$$\alpha_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$(1 - n^2)\alpha_n = 0 \text{ si } n \text{ impair}$$

$$(1 - (2p)^2)\alpha_{2p} = \frac{1}{1-4p^2} \times \frac{4}{\pi} \quad \text{d'où} \quad \alpha_{2p} = \frac{1}{(1-4p^2)^2} \times \frac{4}{\pi}$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{(1-4n^2)^2}$$

Vérifions maintenant que cette application g construite formellement est bien de classe C^2 et vérifie (E) :

On pose :

$$u_n(t) = \frac{\cos(2nt)}{(1-4n^2)^2}$$

$$\|u_n\|_\infty \sim \frac{1}{16n^4}$$

Donc la série d'application de terme général u_n est normalement, donc uniformément convergente.

On peut donc la dériver termes à termes et considérer maintenant la série de terme général u_n' défini par :

$$u_n'(t) = \frac{-2n\sin(2nt)}{(1-4n^2)^2}$$

$$\|u_n'\|_\infty \sim \frac{1}{8n^3}$$

Donc g est déjà C^1. On recommence avec :

$$u_n''(t) = \frac{-4n^2\cos(2nt)}{(1-4n^2)^2} \ ; \ \|u_n''\|_\infty = \frac{1}{4n^2}$$

Donc g est bien C^2.

Enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t)+g(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4n^2\cos(2nt)}{(1-4n^2)^2} + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{(1-4n^2)^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{1-4n^2} = |\sin t|$$

Donc g est bien solution de (E).

Vérifions maintenant que g est unique :

Soit y_0 une solution de l'équation sans second membre : $y'' + y = 0$.

On sait que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y_0(t) = A\cos t + B\sin t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$

Comme g est une solution particulière de (E), on en déduit la solution générale de (E) :

$$y(t) = A\cos t + B\sin t + g(t)$$

Or y_0 est 2π-périodique (lorsque $(A, B) \neq (0\ ;\ 0)$) et g est π-périodique.

Pour obtenir une solution y π-périodique, il est donc nécessaire que $A = B = 0$.

Donc g est unique.

b) Recherche des solutions de (E) (2π- périodiques) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

$$y(0) = 0 \iff A + g(0) = 0 \iff A = -g(0)$$
$$y'(0) = 0 \iff -B + g'(0) = 0 \iff B = g'(0) = 0$$

On calcule $g(0)$ avec la formule de Parseval appliquée à f :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

D'où : $$g(0) = \frac{\pi}{4}$$

La solution recherchée est :

$$y(t) = -\frac{\pi}{4}\cos t + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$$