EXEMPLES D'ÉVALUATION ASYMPTOTIQUE DE RESTES DE SÉRIES CONVERGENTES, DE SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES DIVERGENTES

Exercice 1 *Cas des séries de Riemann*

On suppose connus les résultats relatifs à la convergence des séries de Riemann.

On considère les séries de Riemann : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

1. On suppose **$\alpha > 1$**.

   a. Démontrer : $$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

   b. Puis : $$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

2. On suppose **$\alpha = 1$**.

   a. Démontrer : $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

   b. Démontrer qu'il existe une constante γ telle que :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

   c. Puis :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

3. On suppose **$\alpha \in [0, 1[$**.

   a. Démontrer : $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

   b. Démontrer qu'il existe une constante γ_α telle que :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + o(1)$$

   c. Enfin, démontrer :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

<u>Commentaires sur cet exercice</u> : il fait le point sur le comportement asymptotique des séries de Riemann. Le résultat 1.a. est fondamental car très fréquemment utilisé lors de la sommation de relations de comparaison. Le résultat 2.c. permet d'excellentes approximations de la constante d'Euler. (La vitesse de convergence étant très faible en considérant juste la suite $H_n - \ln n$)
À noter que l'on peut obtenir des développements à tout ordre r fixé, grâce, par exemple, à la fameuse formule d'Euler-MacLaurin (liée au nombres de Bernoulli). Voir par exemple le livre "les maths en tête" de X. Gourdon p 295 à 298.

Exercice 2 *Formule de Stirling améliorée*

On rappelle la formule de Stirling :

$$n\,! = \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n) \quad \text{où} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

Le but de l'exercice est de rechercher un développement asymptotique de ε_n.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $$u_n = \ln\left(\frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\mathbf{e}}{n}\right)^n\right).$$

1. Démontrer : $$u_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

2. En déduire : $$n\,! = \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

<u>Commentaires sur cet exercice</u> : semblable à l'exercice précédent. On utilise les mêmes techniques.

Exercice 3 *Équivalent du reste d'une série convergente vérifiant certaines conditions*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application de classe C^1 vérifiant la condition :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ est convergente.

2. Déterminer un équivalent du reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

3. Application : démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{e}^{-n^2}$ converge et que :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{e}^{-k^2} \underset{+\infty}{\sim} \mathbf{e}^{-(n+1)^2}$$

<u>Commentaires sur cet exercice</u> : la condition sur la limite de f'/f permet de "fabriquer" des séries dont on est assuré de la convergence. À noter que bien peu de fonctions vérifient la condition en question.

Exercice 4 *Étude d'une suite récurrente*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $$\begin{cases} u_0 \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et : $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

(Indication pour prouver l'équivalent : on pourra évaluer $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$)

<u>Commentaires sur cet exercice</u> : on utilise ici le théorème de sommation partielle de l'équivalent pour les séries divergentes.

Exercice 5 *Équivalent du reste d'une série alternée*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série relevant des conditions du théorème spécial à certaines suites dites altérnées.

C'est-à-dire :

i) $(\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (-1)^n\,|u_n|)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n|)$

ii) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

iii) la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On sait alors, dans ces conditions, que :

la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et que son reste $R_n = \sum_{k\geqslant n+1} u_k$ vérifie :

$$\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} u_{n+1} \quad \text{et} \quad |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

1. Démontrer le théorème ci-dessus.
2. Démontrer, de plus, que : $$|R_n| + |R_{n+1}| = |u_{n+1}|$$
3. On suppose, de plus, que :
$$(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convexe et } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$$
Démontrer qu'alors : $$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1}}{2}$$

> Une suite (u_n) est dite "convexe" lorsque :
> $$\forall n,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geqslant 0$$
> Autrement dit, lorsque :
> $$\forall n,\ u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$$
> Condition qui traduit la croissance de la "dérivée" de la suite (u_n). (Interpréter graphiquement)

4. Application : donner un équivalent du reste d'ordre n de la série harmonique alternée.

<u>Commentaires sur cet exercice</u> : le théorème spécial à certaines séries alternées ne donne qu'une majoration du reste. On montre ici que, sous certaines conditions, on peut en avoir un équivalent.

Exercice 6 *Équivalent de la somme partielle des sommes des diviseurs d'entiers*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $\tau(n)$ = nombre de diviseurs de $n = \operatorname{Card}\{m \in \mathbb{N}^*,\, m \mid n\}$

Par exemple : $\tau(12) = \operatorname{Card}\{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;12\} = 6$

1. Démontrer que la série de terme général $\tau(n)$ est divergente.
2. Pour tous i et j de $[\![1, n]\!]$, on note : $$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ divise } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
Expliciter les a_{ij} lorsque $n = 6$.
3. En calculant de deux façons $\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} a_{ij}$, démontrer que :
$$\sum_{j=1}^{n} \tau(j) = \sum_{j=1}^{n} E\left(\frac{n}{j}\right)$$
4. En déduire : $$\sum_{j=1}^{n} \tau(j) \underset{+\infty}{\sim} n \ln n$$

Quelques théorèmes utilisés dans cette série d'exercices

Soit $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ une série à **termes positifs** et (u_n) une suite telle que $\boldsymbol{u_n \sim v_n}$.

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ **converge**, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k .$$

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ **diverge**, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Soit f une fonction définie, positive et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $$v_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.