

EXEMPLES D'ÉTUDE D'INTÉGRALES IMPROPRES

Rappel du vocabulaire :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} (non vide et non réduit à un point).

Soit f une application de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} continue par morceaux sur I .

Cas où f est positive sur I . On dit que f est intégrable sur I lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall J \text{ segment } \subset I, \int_J f(t) dt \leq M$$

Si I est un intervalle du type $[a, +\infty[$, cette définition est équivalente à :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, +\infty[, \int_a^x f(t) dt \leq M$$

Cas où f est à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dit alors que f est intégrable sur I lorsque $|f|$ l'est.

Soient maintenant $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$) et f continue par morceaux sur $[a, b[$.

Si l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a une limite dans \mathbb{R} , on dit que l'intégrale impropre de f sur $[a, b[$ converge.

On note alors $\int_a^b f(t) dt$ cette limite.

(On a une définition analogue en cas de problème à la borne inférieure de l'intégrale)

L'intégrabilité de f entraîne la convergence de son intégrale. Si f est positive, la réciproque est vraie.

Enfin, on dit que l'intégrale impropre de f est semi-convergente lorsqu'elle converge sans que f ne soit intégrable. (Ce qui peut très bien arriver pour des fonctions non positives, voir l'exercice 1)

Exercice 1 Intégrale de Dirichlet

On considère l'application φ définie sur \mathbb{R}_+ par $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi(0) = 1$.

- Démontrer que φ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ mais que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$ existe dans \mathbb{R} .
- a. Démontrer le lemme de Lebesgue suivant :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} . Soit λ un réel.

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

- On considère l'application f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$.

Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$
- On pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{x} dx$. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
- En déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$$

1. Démontrer que les intégrales impropres I et J convergent.

Démontrer que $I = J$, calculer $I + J$ et en déduire I et J .

2. Même question avec, cette fois :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$$

Application : calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan \theta}}$$

Exercice 3

Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.

Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

1. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ converge vers $f(0) \ln \frac{b}{a}$.

2. Application : existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$. (On pourra linéariser $\sin^3 t$ et utiliser la question 1 avec $f = \cos$)

Exercice 4 Règle d'Abel pour les intégrales impropres

Soient $a \in \mathbb{R}$, f et g des applications de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que :

- f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$
- f est décroissante et de limite nulle en $+\infty$
- g est continue sur $[a, +\infty[$
- g vérifie la condition :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2, \left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq M$$

Alors, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge.

Application : soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de l'intégrale impropre : $I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner un exemple de fonction f continue et non bornée sur $[a, +\infty[$ avec $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ convergente.

2. Démontrer : $(f \text{ admet une limite } \ell \text{ en } +\infty \text{ et } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge}) \Rightarrow \ell = 0$

3. Démontrer : $(f \text{ uniformément continue sur } [a, +\infty[\text{ et } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Exercice 1 *Intégrale de Dirichlet*

1. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\varphi(x)| dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Posons $t = x - n\pi$:

$$u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(t + n\pi)|}{t + n\pi} dt$$

On a :

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

D'où :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = \sum_{n=0}^{m-1} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

Et comme la série harmonique diverge, on en déduit que φ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Cependant, une intégration par parties donne :

$$\int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \psi(x) dx = a\psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$$

$$\text{(On a posé : } u(x) = \frac{1}{x} \text{ ; } v'(x) = \sin x \text{ et on a choisit } v(x) = 1 - \cos x \text{)}$$

(On rappelle que l'application $\delta : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par $\delta(0) = 0$)

Or, l'application $\psi : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0 par $\psi(0) = \frac{1}{2}$ donc est localement

intégrable sur \mathbb{R}_+ et comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |\psi(x)| \leq \frac{2}{x^2}$

On en déduit que ψ est bien intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc (continuité sur $[0, 1]$) sur \mathbb{R}_+ , d'où :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \psi(x) dx \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Et comme $\lim_{a \rightarrow +\infty} a\psi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \delta(a) = 0$, on a bien :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Moralité : φ est non intégrable mais son intégrale impropre converge.

2. a. Preuve du lemme de Lebesgue pour les fonctions continues.

Supposons $f = 1$ sur $[a, b]$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons f en escalier sur $[a, b]$. Alors, si $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{]a_{i-1}, a_i[}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} e^{i\lambda t} dt$$

D'où, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons enfin f continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbb{C} est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{C} pour la norme uniforme, il existe $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que :

$$\|f - e\|_\infty \leq \varepsilon$$

Écrivons :

$$f = (f - e) + e$$

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} (f(t) - e(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)| dt \leq \|f - e\|_\infty (b - a) \leq \varepsilon (b - a)$$

Et d'autre part, comme e est en escalier, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

C'est-à-dire :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, (\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \leq \varepsilon)$$

On en déduit que pour tout λ tel que $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \varepsilon (b - a) + \varepsilon$$

Ce qui signifie bien :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Remarques :

- Ce raisonnement fonctionne encore si on suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$.
- Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, une simple intégration par parties suffit à prouver le lemme.
- Si f est à valeurs dans \mathbb{C} , le passage à la partie réelle et à la partie imaginaire donne :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(\lambda t) f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$$

b. On a, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^3)} = \left(-\frac{x}{6} + o(x^2) \right) (1 + o(x)) = -\frac{x}{6} + o(x^2)$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Remarques :

- on a alors $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6} + o(x)$, d'où l'on déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

- En écrivant $f(x) = \frac{\frac{\sin x - x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}$, on peut montrer à l'aide du quotient de deux séries entières que le

prolongement de f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

- c. Précisons au préalable que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2n+1$, donc J_n est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sin[(2n+1)x] - \sin[(2n-1)x] = 2\cos(2nx)\sin x$

D'où :

$$J_n - J_{n-1} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) dx = 0$$

On en déduit que la suite (J_n) est constante et :

$$J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Autre méthode plus longue : on calcule le noyau de Dirichlet :

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = e^{\frac{int}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$$

Posons $t = 2x$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx} \right) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

D'où :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx = 2 \sum_{k=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx) dx - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

- d. Tout comme J_n , K_n est bien définie. Posons $t = (2n+1)x$. Ainsi :

$$K_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$$

On a vu que l'intégrale ci-dessus admet une limite lorsque n tend vers l'infini, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

- e. On a :
- $$K_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin[(2n+1)x] dx$$

Comme f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a d'après le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n - J_n) = 0$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$$

1. L'application $t \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \ln(\sin t)$ est continue donc localement intégrable.

De plus, pour $t \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{\ln(\sin t)}{\ln t} = \frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{\ln t} = \frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \ln t}{\ln t} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

D'où : $\ln(\sin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$

Or, l'application $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1[$.

(En effet, au voisinage de 0 : $\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0$)

Du critère de l'équivalent (les fonctions étant de même signe), on en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \ln(\sin t)$

Posons $u = \frac{\pi}{2} - t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln(\cos t) dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I$$

Donc l'intégrale impropre J converge.

Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ montre que $I = J$.

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt \stackrel{u=2t}{=} -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du$$

$$\text{Or :} \quad \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du \stackrel{v=\pi-u}{=} 2I$$

$$\text{D'où} \quad I + J = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + I$$

$$\text{Et comme } I = J, \text{ on a :} \quad I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

2. Les intégrales I et J sont clairement convergentes.

(Limites finies en 0, et domination par $\frac{1}{t^4}$ en $+\infty$ (pour I) et par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ (pour J))

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons :

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{t^4 + 1} dt \stackrel{u=\frac{1}{t}}{=} \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1}{\frac{1}{u^4} + 1} du = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{u^2}{u^4 + 1} du$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on en déduit :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = J$$

On peut donc écrire :

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt$$

Posons $t = e^s$:

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2s} + 1}{e^{4s} + 1} e^s ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} 2s} ds$$

Comme $\operatorname{ch} 2s = 1 + 2\operatorname{sh}^2 s$:

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} s}{1 + 2\operatorname{sh}^2 s} ds$$

Et enfin, en posant $x = \operatorname{sh} s$:

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 2x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctan(\sqrt{2}x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

D'où

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Application :

Notant $\varphi : \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\tan \theta}}$.

φ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc localement intégrable. De plus :

- $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(\theta) = 0$, ce qui prouve l'intégrabilité de φ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$
- $\varphi(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\theta}}$, ce qui prouve l'intégrabilité de φ au voisinage de 0.

Posons $t = \sqrt{\tan \theta}$.

Comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\tan \theta \in [0, +\infty[$ et donc $t \in [0, +\infty[$.

On a alors $\theta = \arctan(t^2)$ d'où :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan \theta}} = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^4} dt = 2I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3

1. Déjà, l'application $t \mapsto \frac{f(at) - f(bt)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $(\varepsilon, x) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, posons :

$$I(\varepsilon, x) = \int_{\varepsilon}^x \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{\varepsilon}^x \frac{f(at)}{t} dt - \int_{\varepsilon}^x \frac{f(bt)}{t} dt$$

En posant $u = at$ (resp. $u = bt$), on a :

$$I(\varepsilon, x) = \int_{a\varepsilon}^{ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{bx} \frac{f(u)}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du - \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du$$

Étude en $+\infty$: on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. On a alors :

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du = \int_{ax}^1 \frac{f(u)}{u} du + \int_1^{bx} \frac{f(u)}{u} du = \int_1^{bx} \frac{f(u)}{u} du - \int_1^x \frac{f(u)}{u} du \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Étude en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue en 0 :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in \mathbb{R}_+, (|u| \leq \eta \Rightarrow |f(u) - f(0)| \leq \alpha)$$

Pour $\varepsilon \leq \frac{\eta}{b}$, on a alors $|u| \leq \eta$ et donc :

$$\left| \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du - f(0) \ln \frac{b}{a} \right| = \left| \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u) - f(0)}{u} du \right| \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{|f(u) - f(0)|}{u} du \leq \alpha \ln \frac{b}{a}$$

Ce qui prouve finalement que : $I(\varepsilon, x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{x \rightarrow \infty} f(0) \ln \frac{b}{a}$

Remarque : on peut également utiliser la première formule de la moyenne :

$$\exists c_\varepsilon \in [a\varepsilon, b\varepsilon], \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du = f(c_\varepsilon) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u} du = f(c_\varepsilon) \ln \frac{b}{a}$$

Et comme $c_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$, par continuité de f en 0, il vient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

2. Déjà, l'application $\varphi : t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(En effet, φ continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable. En 0, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^3 t}{t^2} = 0$, ce qui assure

l'intégrabilité au voisinage de 0 et d'autre part, pour tout $t \in]1, +\infty[$, on a $\frac{|\sin^3 t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, ce qui assure

l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.)

En linéarisant, on a : $\sin^3 t = \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{4}$

Une intégration par parties donne :

$$\int_{\varepsilon}^x \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = -\frac{1}{4} \left[\frac{3 \sin t - \sin(3t)}{t} \right]_{\varepsilon}^x + \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^x \frac{\cos t - \cos(3t)}{t} dt$$

Le crochet tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

On en déduit la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - \cos(3t)}{t} dt$. (On pouvait aussi utiliser la question 1 pour le prouver)

Appliquons la question 1 avec $f = \cos$ (f est bien continue en 0 et l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ converge par une intégration par parties ou d'après la règle d'Abel...)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - \cos(3t)}{t} dt = \cos 0 \times \ln 3 = \ln 3$$

Première formule de la moyenne :

Soient f et $g \in C([a, b])$ avec $g \geq 0$.

$\exists c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \ln 3$$

Exercice 4

On utilise le critère de Cauchy pour les intégrales impropres.

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et x et y dans $[a, +\infty[$ avec $x < y$.

Notons G la primitive de g qui s'annule en a :

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

Critère de Cauchy pour les intégrales impropres :

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in [a, +\infty[, \forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2,$

$$y > x \geq K \Rightarrow \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

D'après les hypothèses i) et iii), on peut procéder à l'intégration par parties suivante :

$$\int_x^y f(t)g(t) dt = [f(t)G(t)]_x^y - \int_x^y f'(t)G(t) dt$$

D'après l'hypothèse iv) :

$$\forall (u, v) \in ([a, +\infty[)^2, \left| \int_u^v f(t)g(t) dt \right| \leq M$$

Donc en particulier :

$$\forall v \in [a, +\infty[, \left| \int_a^v f(t)g(t) dt \right| \leq M$$

Donc :

$$\forall t \in [x, y] \subset [a, +\infty[, G(t) \leq M$$

D'où :

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq M(|f(x)| + |f(y)|) + M \int_x^y |f'(t)| dt$$

Et comme d'après iii), f est positive sur $[a, +\infty[$ et f' négative sur $[a, +\infty[$:

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq M(f(x) + f(y)) - A(f(y) - f(x)) \leq 2Mf(x)$$

Mais comme f tend vers 0 en $+\infty$, on a :

$$\exists K \in [a, +\infty[, \forall x \in [a, +\infty[, (x \geq K \Rightarrow 2Mf(x) \leq \varepsilon)$$

Récapitulons :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in [a, +\infty[, \forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2, (y > x \geq K \Rightarrow \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq \varepsilon)$$

Ce qui prouve (via le critère de Cauchy), la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$.

Application :

- $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, décroissante et de limite nulle.
- $g : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et vérifie :

$$\forall (x, y) \in ([1, +\infty[)^2, \left| \int_x^y g(t) dt \right| = \left| \int_x^y e^{it} dt \right| = \left| \frac{e^{iy} - e^{ix}}{i} \right| \leq 2$$

Donc l'intégrale impropre I_α est convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque : on retrouve évidemment ce résultat par une intégration par parties :

On a :

$$\left| \frac{e^{it}}{t^\alpha} \right| = \frac{1}{t^\alpha}$$

Donc l'application $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Recherche du domaine de convergence :

Une intégration par parties donne :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \left[\frac{e^{it}}{it^\alpha} \right]_1^x + \frac{\alpha}{i} \int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$$

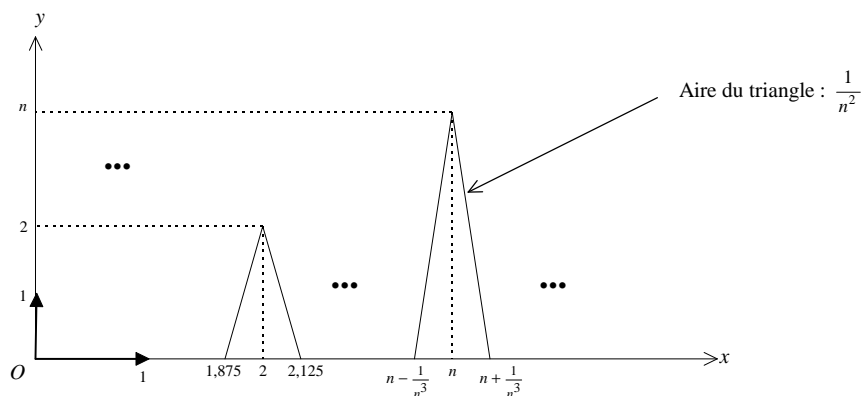
Comme $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, le crochet tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. De plus l'intégrale $\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$ converge car

l'application $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, I_\alpha$ converge

Exercice 5

1.



Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} n^4 t + n - n^5 & \text{si } n \in [n - \frac{1}{n^3}, n], n \geq 2 \\ -n^4 t + n + n^5 & \text{si } n \in [n, n + \frac{1}{n^3}], n \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

i) f continue sur $[0, +\infty[$. En effet, pour tout $n \geq 2$:

$$f\left(n - \frac{1}{n^3}\right) = n^5 - n + n - n^5 = 0 = \lim_{t \rightarrow n - \frac{1}{n^3}} f(t)$$

$$f\left(n + \frac{1}{n^3}\right) = -n^5 - n + n + n^5 = 0 = \lim_{t \rightarrow n + \frac{1}{n^3}} f(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow n^-} f(t) = n = \lim_{t \rightarrow n^+} f(t)$$

ii) f n'est pas bornée. En effet, pour tout $n \geq 2$:

$$f(n) = n$$

iii) l'intégrale impropre de f converge. En effet, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

L'application $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est croissante (car f positive) et majorée (par $\frac{\pi^2}{6}$), donc admet bien une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$; ce qui prouve la convergence de l'intégrale impropre de f .

2. Supposons maintenant que f admet une limite ℓ en $+\infty$ et que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ convergente.

Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell \neq 0$.

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell > 0$.

Nous allons montrer que le critère de Cauchy n'est pas satisfait.

On en déduira une contradiction.

Comme f tend vers $\ell > 0$, on a :

$$\exists A \in [a, +\infty[, \forall x \in [a, +\infty[, (x \geq A \Rightarrow f(x) \geq \frac{\ell}{2})$$

Soit $K \in [a, +\infty[$.

Pour tous x et y de $[a, +\infty[$ tels que $y > x \geq \max(A, K)$, on a alors :

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \geq \frac{\ell}{2} (y - x)$$

Posons $\varepsilon = \frac{\ell}{3} (y - x)$. Ainsi, $\forall K \in [a, +\infty[, \exists (x, y) \in ([a, +\infty[)^2$ tels que

$$y > x \geq K \text{ et } \left| \int_x^y f(t) dt \right| > \varepsilon$$

Ce qui contredit le critère de Cauchy, donc l'intégrale diverge. Absurde. Donc $\ell = 0$

3. Supposons maintenant f uniformément continue sur $[a, +\infty[$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ convergente.

Montrons qu'alors f est nécessairement de limite nulle en $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde. On suppose que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in [a, +\infty[, \exists x_0 \in [a, +\infty[, (x_0 \geq A \text{ et } |f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Comme f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$, on a pour le réel ε ci-dessus :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, +\infty[, (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2})$$

Dans ces conditions ($x_0 \geq A$ et $|x - x_0| \leq \eta$), d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc f est de signe constant sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ donc :

Négation du critère de Cauchy pour les intégrales impropres :

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$
 $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ non convergente ssi :
 $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall K \in [a, +\infty[, \exists (x, y) \in ([a, +\infty[)^2,$
 $y > x \geq K \text{ et } \left| \int_x^y f(t) dt \right| > \varepsilon$

Inégalité triangulaire renversée :

$|x| - |y| \leq |x - y|$
 ou encore :
 $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$

$$\left| \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(t) dt \right| = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)| dt \geq \varepsilon \eta$$

Ce qui contredit le critère de Cauchy, donc l'intégrale diverge. Absurde.

Donc f est de limite nulle en $+\infty$.