Exercice 1

Soit $(m, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

*Commentaire sur cet exercice : utilisation du rang pour résoudre un **système linéaire**. (Le rang du système donnant la nature de l'ensemble des solutions)*

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre, dans $M_3(\mathbb{K})$, l'équation matricielle :

$$M^2 = 0$$

1. On suppose que $M^2 = 0$. Démontrer : $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M$. En déduire : $\operatorname{rg} M \leqslant 1$.
2. En déduire : $$M^2 = 0 \iff (\operatorname{rg} M \leqslant 1 \text{ et } \operatorname{tr} M = 0)$$
3. Application : on donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{e}^A$.

*Commentaire sur cet exercice : utilisation du rang d'une matrice pour résoudre une **équation matricielle**. Application au calcul de l'exponentielle d'une matrice particulière.*

Exercice 3

F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E.

On considère les applications linéaires suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{l} F \times G \to E \\ (f, g) \mapsto f + g \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{l} F \cap G \to F \times G \\ f \mapsto (f, -f) \end{array}$$

1. Démontrer que $\operatorname{Ker} \varphi \cong F \cap G$.
2. En déduire une démonstration de la relation :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

*Commentaire sur cet exercice : utilisation du théorème du rang pour démontrer la **formule de Grassmann**.*

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

On note B la transposée de la commatrice de A : $B = {}^t(\operatorname{com}(A))$.

Démontrer que : $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow B \text{ diagonalisable}$$

*Commentaire sur cet exercice : lien entre la **diagonalisation** d'une matrice et la transposée de sa comatrice.*
Discussion suivant le rang de A.

Exercice 5

E est un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

Commentaire sur cet exercice : utilisation du théorème du rang pour déterminer une CNS pour que le noyau et l'image d'un ***endomorphisme*** *coïncident.*

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \quad \text{où} \quad a_{ij} = \sin(\alpha_i + \alpha_j)$$

1. Prouver que $\operatorname{rg} A \leqslant 2$.
2. Calculer le déterminant de A.

Commentaire sur cet exercice : exploitation du rang (faible) d'une matrice pour calculer son ***déterminant****.*

Exercice 7

1. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer :

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f)$$

2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $h, k \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer :

$$|\operatorname{rg} h - \operatorname{rg} k| \leqslant \operatorname{rg}(h + k) \leqslant \operatorname{rg} h + \operatorname{rg} k$$

3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\begin{cases} f + g \in GL(E) \\ f \circ g = 0 \end{cases}$$

   Déterminer $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Commentaire sur cet exercice : utilisation de diverses inégalités vérifiées par le rang d'applications linéaires

Exercice 8

E est un e.v.e. de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique. (C'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$)

1. Démontrer que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
2. Démontrer que f est de rang pair.
3. Démontrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que : $\forall x \in E$, $f(x) = a \wedge x$.

Commentaire sur cet exercice : utilisation du rang pour caractériser un endomorphisme antisymétrique par un produit vectoriel.

Mini formulaire sur le rang :

E, F et G sont des espaces vectoriels de dimensions finies n, p et q.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$

Propriétés en termes "d'applications linéaires" :	Traduction matricielle :
1) $\operatorname{rg} f \leqslant \inf(\dim E, \dim F)$	$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leqslant \inf(n, p)$
2) $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \inf(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$	$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(BA) \leqslant \inf(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$
3) Si f bijective, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$	$\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{n,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg} B$
4) Si g bijective, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$	$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in GL_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg} A$
5) f bijective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} f = n = p$	$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
6) $\operatorname{rg}({}^t f) = \operatorname{rg} f$	$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}({}^t A) = \operatorname{rg} A$
7) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\operatorname{rg}(\lambda f) = \operatorname{rg} f$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\operatorname{rg}(\lambda A) = \operatorname{rg} A$
8) Si p est un projecteur, alors $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$	$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A^2 = A \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{tr} A$

Exercice 1

On remarque déjà que les deux premières équations ne sont pas liées. (Examiner les coefficients de x et z)

Donc le système est de rang au moins égal à 2.

Le déterminant Δ du système est :

$$\Delta = 2m(2 - m)$$

Donc : $m \in \{0\ ;\ 2\} \iff (S)$ est de rang 2

$m \notin \{0\ ;\ 2\} \iff (S)$ est de rang 3

<u>$m = 0$</u>

Le système (S) s'écrit :

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ 3x + y = a + b \\ 3x + y = c \end{cases}$$

- Si $a + b \neq c$ alors $S = \varnothing$
- Si $a + b = c$ alors $S = \{(t, c - 3t, c - t - a), t \in \mathbb{R}\}$

$$S = \mathbb{R}V + C \text{ où } V\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } C\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c-a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\dim S = 1}$

<u>$m = 2$</u>

Le système (S) s'écrit :

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ 3x + 3y = a + b \\ -x - y = c - 2a \end{cases}$$

- Si $a + b \neq -3(c - 2a)$, i.e. $5a - b - 3c \neq 0$ alors $S = \varnothing$
- Si $5a - b - 3c = 0$ alors $S = \{(t, c - 2a - t, c - 3a + t), t \in \mathbb{R}\}$

$$S = \mathbb{R}W + D \text{ où } W\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } D\begin{pmatrix} 0 \\ c-2a \\ c-3a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\dim S = 1}$

<u>$m \notin \{0\ ;\ 2\}$</u>

Le rang du système est égal à 3. Il y a un seul triplet solution. (On le calcule en fonction de m avec les méthodes classiques)

Exercice 2

1. Soit $Y \in \operatorname{Im} M$. Alors :

$$\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{K}),\ Y = MX$$

En appliquant M : $MY = M^2X = 0$

Donc : $Y \in \operatorname{Ker} M$

D'où : $\quad \operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M$

En passant aux dimensions : $\quad \operatorname{rg} M \leqslant \dim \operatorname{Ker} M$

Et d'après le théorème du rang : $\quad \operatorname{rg} M \leqslant 3 - \operatorname{rg} M$

D'où : $\quad \operatorname{rg} M \leqslant 1$

2. Supposons $M^2 = 0$.

   On vient de voir qu'alors $\operatorname{rg} M \leqslant 1$.

   Si $\operatorname{rg} M = 0$, alors $M = 0$ et donc $\operatorname{tr} M = 0$.

   Si $\operatorname{rg} M = 1$, alors ses trois colonnes sont proportionnelles. On peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_1 & \lambda_3 c_1 \\ \lambda_1 c_2 & \lambda_2 c_2 & \lambda_3 c_2 \\ \lambda_1 c_3 & \lambda_2 c_3 & \lambda_3 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = C\,{}^tL \text{ où } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

   Or : $\quad 0 = M^2 = C\,{}^tL\,C\,{}^tL = C\,({}^tL\,C)\,{}^tL = C\,{}^t({}^tC\,L)\,{}^tL$

   Et comme : $\quad {}^tC\,L = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 = \operatorname{tr} M$

   Il vient : $\quad 0 = (\operatorname{tr} M)\,C\,{}^tL = (\operatorname{tr} M)\,M$

   Or, $M \neq 0$ (car $\operatorname{rg} M \neq 0$) donc $\quad \operatorname{tr} M = 0$

   On a prouvé : $\quad M^2 = 0 \;\Rightarrow\; (\operatorname{rg} M \leqslant 1 \text{ et } \operatorname{tr} M = 0)$

   Réciproquement, supposons : $\quad \operatorname{rg} M \leqslant 1$ et $\operatorname{tr} M = 0$

   Alors, le même calcul que ci-dessus montre que :

$$0 = (\operatorname{tr} M)\,M = M^2 \text{ car } \operatorname{rg} M \leqslant 1$$

   Bilan : $\quad M^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\operatorname{rg} M \leqslant 1 \text{ et } \operatorname{tr} M = 0)$

3. Application.

   Posons $\quad M = A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   On remarque que $\operatorname{rg} M = 1$ et $\operatorname{tr} M = 0$. Donc $M^2 = 0$.

   On a alors : $\quad \mathbf{e}^A = \mathbf{e}^{I_3 + M}$

   Comme M et I_3 commutent : $\quad \mathbf{e}^{I_3 + M} = \mathbf{e}^{I_3}\,\mathbf{e}^M$

   Et comme $M^2 = 0$: $\quad \mathbf{e}^M = I_3 + M$

   D'où : $\quad \mathbf{e}^A = \mathbf{e}(I_3 + M) = \mathbf{e}A$

Exercice 3

1. $\operatorname{Ker} \varphi = \{(f, g) \in E \times F \text{ tels que } f + g = 0\} = \operatorname{Im} \psi$

   De plus ψ est injective, donc induit un isomorphisme sur son image. Donc $\operatorname{Ker} \varphi \cong F \cap G$.

2. En outre, $\operatorname{Im} \varphi = F + G$.

   Appliquons le théorème du rang à φ, il vient :

$\dim(F \times G) = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim(F \cap G) + \dim(F + G)$.

Et comme $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on obtient la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Remarque : autre démonstration (plus difficile à mémoriser)

On sait que $F \cap G$ admet au moins un supplémentaire dans F.

Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F : $\quad F = F' \oplus (F \cap G)$

On a, par conséquent : $\quad \dim F' = \dim F - \dim(F \cap G) \quad (1)$

Montrons que : $\quad F + G = F' \oplus G$

D'une part, comme $F \cap G \subset G$: $\quad F + G = F' + (F \cap G) + G = F' + G$

D'autre part : $\quad F' \cap G \overset{F' \subset F}{=} F' \cap F \cap G \overset{F = F' \oplus (F \cap G)}{=} \{0\}$

On a donc bien : $\quad F + G = F' \oplus G$

On en déduit : $\quad \dim F' = \dim(F + G) - \dim G \quad (2)$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Idée de la démonstration : Considérer un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F. Puis vérifier que F' est de dimension "convenable"

Exercice 4

Rappel : $\quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ A\,{}^t(\operatorname{com} A) = {}^t(\operatorname{com} A)A = (\det A)I_n$

Avec nos notations : $\quad AB = BA = (\det A)I_n$

Supposons donc A diagonalisable.

Distinguons plusieurs cas :

rg $A = n$

Alors, A étant inversible, on a $B = A^{-1}$.

Comme A est diagonalisable : $\quad \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in D_n(\mathbb{K}),\ A = PDP^{-1}$

Or, A est inversible donc $0 \notin \operatorname{Sp}(A)$, donc D est inversible et :

$$B = A^{-1} = PD^{-1}P$$

Ce qui prouve que B est diagonalisable.

rg $A \leqslant n - 2$

Dans ce cas, tous les déterminants de taille $n - 1$ extraits de A sont nuls. Donc $B = 0$, donc diagonalisable.

rg $A = n - 1$

Dans ce cas, $\det A = 0$ et donc : $\quad AB = BA = 0$

Nous allons montrer que les sous-espaces propres de A sont inclus dans des sous-espaces propres de B.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et $X \in \operatorname{SEP}(A, \lambda) \setminus \{0\}$

Si $\lambda \neq 0$, alors $\quad \lambda BX = B(\lambda X) = B(AX) = (BA)X = 0$

D'où : $\quad BX = 0$

$$X \in \operatorname{SEP}(B, 0)$$

D'où : $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)\setminus\{0\}} \mathrm{SEP}(A, \lambda) \subset \mathrm{SEP}(B, 0)$

Si $\lambda = 0$, alors $\mathrm{SEP}(A, 0) = \mathrm{Ker}\, A$

Or, par hypothèse : $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$

Soit $X \in \mathrm{SEP}(A, 0) \setminus \{0\}$, alors on peut écrire : $\mathrm{SEP}(A, 0) = \mathbb{K}X$

Or, $AB = 0$ donc $ABX = 0$ d'où : $BX \in \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{SEP}(A, 0) = \mathbb{K}X$

C'est-à-dire : $\exists\mu \in \mathbb{K},\ BX = \mu X$

$X \in \mathrm{SEP}(B, \mu)$

D'où : $\displaystyle\mathrm{SEP}(A, 0) \subset \mathrm{SEP}(B, \mu) \subset \bigoplus_{\mu\in \mathrm{Sp}(B)} \mathrm{SEP}(B, \mu)$

Finalement : $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{SEP}(A, \lambda) \subset \bigoplus_{\mu\in \mathrm{Sp}(B)} \mathrm{SEP}(B, \mu)$

Et comme A diagonalisable : $\displaystyle\mathbb{K}^n \subset \bigoplus_{\mu\in \mathrm{Sp}(B)} \mathrm{SEP}(B, \mu)$

Donc : $\displaystyle\bigoplus_{\mu\in \mathrm{Sp}(B)} \mathrm{SEP}(B, \mu) = \mathbb{K}^n$

Ce qui signifie : B diagonalisable

Exercice 5

Supposons : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$

Alors, en passant aux dimensions : $\dim \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{rg}\, f$

Et d'après le théorème du rang : $n - \mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f$

$2\, \mathrm{rg}\, f = n$

Soit $x \in E$. On a : $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$

Par hypothèse : $f(x) = \mathrm{Ker}\, f$

D'où : $f^2(x) = 0$

Donc : $f^2 = 0.$

On a prouvé : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \Rightarrow (n = 2\, \mathrm{rg}\, f \text{ et } f^2 = 0)$

Réciproquement, supposons : $n = 2\, \mathrm{rg}\, f$ et $f^2 = 0$

Alors, d'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{rg}\, f$

Donc : $\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$

Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$: $\exists x \in E, y = f(x)$

$f(y) = f^2(x) = 0$

$y \in \mathrm{Ker}\, f$

Donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$

Et comme les dimensions sont les mêmes : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$

<u>Bilan</u> : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow (n = 2\, \mathrm{rg}\, f \text{ et } f^2 = 0)$

Exercice 6

1. Remarquons que : $$a_{ij} = \sin\alpha_i \cos\alpha_j + \cos\alpha_i \sin\alpha_j$$

   Notons, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. On a :

$$C_j = \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 \cos\alpha_j + \cos\alpha_1 \sin\alpha_j \\ \vdots \\ \sin\alpha_n \cos\alpha_j + \cos\alpha_n \sin\alpha_j \end{pmatrix} = \cos\alpha_j\, U + \sin\alpha_j V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 \\ \vdots \\ \sin\alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \vdots \\ \cos\alpha_n \end{pmatrix}$$

   On a donc : $$\mathrm{Vect}\left((C_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\right) \subset \mathrm{Vect}(U, V)$$

   Donc : $$\mathrm{rg}\, A \leqslant 2$$

2. Donc si $n \geqslant 3$, alors A est non inversible donc $\det A = 0$.

   Si $n = 2$, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} \sin(2\alpha_1) & \sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \sin(2\alpha_2) \end{vmatrix} = \sin(2\alpha_1)\sin(2\alpha_2) - \sin^2(\alpha_1+\alpha_2) = -\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

   Si $n = 1$, alors $\det A = \sin(2\alpha_1)$

Exercice 7

1. $$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}(f)})) = \mathrm{rg}(g_{|\mathrm{Im}(f)}) = \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}(f)}))$$

   Or, $$\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$$

   Donc : $$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f - \dim(\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f)$$

   Or, $$\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$$

   Donc : $$\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}\, f - \dim(\mathrm{Ker}\, g)$$

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim F$$

2. Remarquons que : $$\mathrm{Im}(h + k) \subset \mathrm{Im}\, h + \mathrm{Im}\, k$$

   En conséquence :

$$\mathrm{rg}(h + k) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, h + \mathrm{Im}\, k) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, h) + \dim(\mathrm{Im}\, k)$$

$$\mathrm{rg}(h + k) \leqslant \mathrm{rg}\, h + \mathrm{rg}\, k$$

   En appliquant cette inégalité :

$$\mathrm{rg}\, h = \mathrm{rg}(h + k - k) \leqslant \mathrm{rg}(h + k) + \mathrm{rg}(-k) \leqslant \mathrm{rg}(h + k) + \mathrm{rg}\, k$$

   Donc : $$\mathrm{rg}\, h - \mathrm{rg}\, k \leqslant \mathrm{rg}(h + k)$$

   De même : $$\mathrm{rg}\, k - \mathrm{rg}\, h \leqslant \mathrm{rg}(h + k)$$

   D'où : $$|\mathrm{rg}\, h - \mathrm{rg}\, k| \leqslant \mathrm{rg}(h + k)$$

3. D'après 1. $$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant 0$$

$$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \leqslant \dim E$$

   D'après 2., comme $f + g \in GL(E)$:

$$\dim E = \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$$

   <u>Bilan</u> : $$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$$

Exercice 8

Existence

Soit A la matrice de f dans une base orthonormée de E.

A est donc antisymétrique : $$A = -{}^tA$$

On a donc : $$\det(A) = \det(-{}^tA) = (-1)^3 \det({}^tA) = -\det(A)$$

Donc : $$\det(A) = 0$$

A, et donc f n'est en conséquence pas inversible d'où :

$$\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$$

Si $f = 0$, alors $a = 0$ convient.

Supposons désormais $f \neq 0$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 ou 2.

On a donc : $$\operatorname{rg} f = 2 \text{ ou } 1$$

Nous allons montrer que $\operatorname{rg} f = 2$.

Montrons tout d'abord que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Soient x et y dans E.

On a : $$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y)) = 0$$

D'où : $$\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$$

En conséquence : $$\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$$

Or, d'après le théorème du rang : $$\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \operatorname{Ker} f$$

En outre : $$\dim (\operatorname{Ker} f)^{\perp} = 3 - \dim \operatorname{Ker} f$$

D'où : $$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$$

D'autre part, il est clair que $\operatorname{Im} f$ est stable par f, donc l'endomorphisme g induit par f sur $\operatorname{Im} f$ est toujours antisymétrique (pour le produit scalaire induit).

Si $\operatorname{Im} f$ est de dimension 1 alors il existe $u \in E$, non nul, tel que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}u$.

Donc : $$g(u) = ku \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Et comme g est antisymétrique : $$(u \mid g(u)) = -(g(u) \mid u)$$

$$k\,\|u\|^2 = -k\|u\|^2$$

Et comme u est non nul : $$k = 0$$

Donc f serait nulle sur $\operatorname{Im} f$.

Or, on a vu que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ donc $$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

Donc f serait nulle sur E, absurde.

On en déduit : $\operatorname{rg} f = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Soient (i, j) une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$ et k tel que (i, j, k) soit une base orthonormée directe de E.

Comme f est antisymétrique, la matrice de f dans la base (i, j, k) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors : $$\alpha k \wedge i = \alpha j = f(i)$$

$$\alpha k \wedge j = -\alpha i = f(j)$$

$$\alpha k \wedge k = 0 = f(k)$$

Posons $a = \alpha k$. Par coïncidence sur une base de f et $x \mapsto \alpha k \wedge x$, on déduit :

$$\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x$$

<u>Unicité</u> :

Supposons : $\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x = b \wedge x$

En particulier pour $x = a$: $0 = b \wedge a$

Donc a et b sont liés : $b = \lambda a,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Alors : $\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x = \lambda\, a \wedge x$

En particulier pour un x tel que $a \wedge x \neq 0$, on obtient : $\lambda = 1$

D'où : $b = a$