

**EXEMPLES D'ÉTUDE DE SÉRIES RÉELLES OU COMPLEXES
NON ABSOLUMENT CONVERGENTES**

Exercice 1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

Exercice 2

1. Montrer que il existe θ dans $]0, 1[$ tel que : $e = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}$

2. Montrer que $\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$ est un entier pair.

3. Montrer que la série de terme général $u_n = \sin(\pi n! e)$ est semi-convergente.

Exercice 3

Soit $\theta \in]0 ; 2\pi[$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.

2. Étudier de deux manières différentes la limite de la suite $(I_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$I_n(\theta) = \int_{\pi}^{\theta} \sum_{k=1}^n e^{ikt} dt$$

[On pourra utiliser le lemme de Lebesgue]

3. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \quad (n \geq 2)$$

suivant les différentes valeurs de $\alpha \in]0, 1]$.

**EXEMPLES D'ÉTUDE DE SÉRIES RÉELLES OU COMPLEXES
NON ABSOLUMENT CONVERGENTES : SOLUTIONS**

Exercice 1

1. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = (-1)^n u_n$
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0

D'après le théorème sur les séries alternées, on en déduit la convergence de la série de terme général u_n .

Calculons, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-t^\alpha)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^\alpha)^{N+1}}{1 + t^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^\alpha} - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1 + t^\alpha} dt$$

On a donc :

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^\alpha} \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1 + t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha(N+1)} dt \leq \frac{1}{\alpha(N+1)+1}$$

D'où, par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^\alpha}$$

2. Pour $\alpha = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$$

Pour $\alpha = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0 = \frac{\pi}{4}$$

Pour $\alpha = 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

Considérons la fraction rationnelle :

$$F(t) = \frac{1}{1+t^3}$$

On décompose F en éléments simples :

$$F(t) = \frac{1}{1+t^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2}$$

On a :

$$A = F(t)(1+t)|_{t=-1} = -1 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tF(t) = A + B = 0 \text{ donc } B = -\frac{1}{3}$$

$$F(0) = A + C = 1 \text{ donc } C = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{1-t+t^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right)$$

En posant $u = t - \frac{1}{2}$ dans le troisième terme, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\ln |t^2 - t + 1| \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 - 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arc tan} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}$$

$$\text{D'où : } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

Les amateurs pourront encore étudier le cas $\alpha = 4$.

Exercice 2

1. La formule de Taylor avec reste de Lagrange, à l'ordre $n + 1$, appliquée à $f = \exp$ sur $[0, 1]$ donne :

$$\exists \theta \in [0, 1] \text{ tel que : } \exp(1) = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!} \exp^{(k)}(0) + \frac{\exp^{(n+2)}(\theta)}{(n+2)!}$$

$$\text{D'où : } e = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}$$

2. Pour tout entier $n \geq 3$, $n(n-1)$ est un entier pair, donc :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \frac{n!}{p!} \text{ est un entier pair}$$

Par conséquent $\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$ est un entier pair.

3. D'après la question 1 :

$$\pi n! e = \pi \left(\sum_{p=0}^{n+1} \frac{n!}{p!} + \frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Notons $2k$ l'entier pair $\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$, ainsi :

$$\pi n! e = \pi \left(2k + \frac{n!}{(n-1)!} + 1 + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right) = 2k\pi + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{D'où : } u_n = \sin(\pi n! e) = \sin \left((n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right) = (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$u_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

On en déduit :
$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n+1}$$

Du théorème spécial à certaines séries alternées, on déduit la convergence de la série de terme général u_n .

Et comme la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1} \pi}{n+1}$ n'est pas absolument convergente, la série de terme général u_n est bien semi-convergente.

Exercice 3

Rappelons la règle d'Abel pour les séries :

Soit (ε_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

Soit (a_n) une suite de complexes telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{p=0}^n a_p \right| \leq M$$

(Majoration des sommes partielles)

Cette règle existe aussi pour les intégrales.

Alors la série de terme général $\varepsilon_n a_n$ est convergente.

Démonstration de la règle d'Abel :

Posons :
$$A_n = \sum_{p=0}^n a_p$$

Ainsi : $A_0 = a_0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, a_p = A_p - A_{p-1}$

Posons également :
$$S_n = \sum_{p=0}^n \varepsilon_p a_p$$

Nous allons montrer que la suite (S_n) converge :

$$S_n = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^n \varepsilon_p (A_p - A_{p-1})$$

$$S_n = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^n \varepsilon_p A_p - \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_{p+1} A_p$$

$$S_n = \varepsilon_n A_n + \sum_{p=0}^{n-1} (\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) A_p$$

Cette dernière écriture est souvent appelée "transformation d'Abel". On notera l'analogie avec une intégration par parties.

• La suite (A_n) est bornée et la suite (ε_n) converge vers 0 donc la suite $(\varepsilon_n A_n)$ converge aussi vers 0.

• De plus :
$$\sum_{p=0}^{n-1} |\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}| |A_p| \leq M(\varepsilon_0 - \varepsilon_n) \leq M\varepsilon_0$$

La série de terme général $(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) A_p$ est donc absolument convergente, donc convergente (car \mathbb{C} est complet)

On en déduit la convergence de la suite (S_n) , c'est-à-dire la convergence de la série de terme général $\varepsilon_n a_n$.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = e^{in\theta}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$

Il est clair que la suite (ε_n) est strictement positive, décroissante et tendant vers 0.

Montrons que les sommes $\left| \sum_{p=1}^n a_p \right|$ sont majorées :

$$\sum_{p=1}^n e^{ip\theta} = \sum_{p=1}^n (e^{i\theta})^p \stackrel{e^{i\theta} \neq 1}{=} \frac{e^{i\theta}(e^{in\theta} - 1)}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta} e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right)} = \frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

D'où :

$$\left| \sum_{p=1}^n e^{ip\theta} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}$$

D'après la règle d'Abel, on déduit la convergence de la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n}$.

2. Rappelons le lemme de Lebesgue pour une fonction f de classe C^1 .

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} . Soit λ un réel.

Alors
$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Démonstration du lemme de Lebesgue :

Les applications f et $t \mapsto e^{it}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$, on a, par une intégration par parties :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \left[f(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} f'(t) dt = \frac{1}{i\lambda} \left[f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \right]$$

D'où :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Notons $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ (existe car, par hypothèse, f' est continue sur le compact $[a, b]$)

Ainsi :

$$0 \leq \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + (b-a)M \right]$$

D'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

Fin de la démonstration du lemme de Lebesgue.

Appliquons maintenant ce lemme. On a vu que :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikt} = \frac{e^{it}(e^{int} - 1)}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+1)t}}{e^{it} - 1} - \frac{e^{it}}{e^{it} - 1}$$

Or, l'application $t \mapsto \frac{e^{it}}{e^{it} - 1}$ est de classe C^1 sur $[\pi, \theta]$ (ou $[\theta, \pi]$) puisque $\theta \in]0, 2\pi[$.

Donc, d'après le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{i(n+1)t}}{e^{it} - 1} dt = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\theta) = \int_{\theta}^{\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} dt$$

Et comme :

$$\frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2i} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

On obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\theta) = \frac{1}{i} \left[\ln\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \right]_{\theta}^{\pi} + \frac{\pi - \theta}{2} = i \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\pi - \theta}{2} \quad (1)$$

D'autre part,

$$I_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^{\theta} e^{ikt} dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_{\pi}^{\theta} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} - \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\theta) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} + \frac{1}{i} \ln 2 \quad (2)$$

3. De (1) et (2), on déduit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = -\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i \frac{\pi - \theta}{2} - \ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i \frac{\pi - \theta}{2}$$

En séparant parties réelles et parties imaginaires :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Exercice 4

Il suffit d'écrire :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n \quad \text{où} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)}$$

On constate que :

$$v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

- Si $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$, alors la série de terme général v_n est absolument convergente. Comme la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente, on en déduit la semi-convergence de la série de terme général u_n .
- Si $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, alors la série de terme général v_n est divergente donc la série de terme général u_n aussi.