Exercice 1 *Les sous-espaces propres sont en somme directe.*

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ deux à deux distinctes.

Démontrer que les sous-espaces propres de f, $\mathrm{SEP}(f, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, sont en **somme directe**.

Exercice 2 *Avec des coefficients binomiaux*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A = \sum_{k=0}^{E(n/3)} C_n^{3k}$$

$$B = \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} C_n^{3k+1}$$

$$C = \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} C_n^{3k+2}$$

Calculer A, B et C.

Exercice 3 *Recherche du développement limité de la fonction réciproque*

Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x\mathbf{e}^{x^2}$$

Démontrer que f admet une application réciproque et déterminer le développement limité, à l'ordre 5, de f^{-1} en 0.

Exercice 4 *Théorème de la perpendiculaire commune*

Dans l'espace affine de dimension 3, on considère deux droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(A', \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

Démontrer que, dans ces conditions, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et D'.

Exercice 5 *Formule d'inversion de Pascal - Applications*

Soient $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des familles d'éléments d'un anneau commutatif A telles que :

$$a_p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k b_k \quad \forall p \in [\![0, n]\!]$$

Démontrer :
$$b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k a_k \quad \forall p \in [\![0, n]\!]$$

Applications :

1. Soient X et Y des ensembles de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ respectivement.

   Le nombre de surjections de X sur Y est : $S(n, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n$

2. Soit X un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

   Le nombre de dérangements de X est : $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

<u>Théorème des chapeaux</u> : n invités laissent leur chapeau au vestiaire et repartent les uns après les autres en prenant un chapeau au hasard. La probabilité p_n qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas tend vers $\dfrac{1}{\mathbf{e}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 6 *Calcul d'une borne inférieure*

Calculer :
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left[x^3 - (ax^2 + bx + c)\right]^2 \mathrm{d}x$$

Exercice 1 *Les sous-espaces propres sont en somme directe.*

On procède par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$.

On considère la propriété : $\wp(N) : \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i)$

On a $\wp(1)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(N)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1}$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ dans E tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, N+1\} \quad x_i \in \mathrm{SEP}(f, \lambda_i) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} x_i = 0 \end{cases}$$

Idée de la démonstration :
On applique f à une somme de $N+1$ vecteurs. En combinant les équations, on se ramène à une somme de N vecteurs qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

En appliquant f : $0 = f(0) = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} x_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i$

On a donc : $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{N+1} = 0 & (E_1) \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0 & (E_2) \end{cases}$

En effectuant $\lambda_{N+1}(E_1) - (E_2)$:

$$(\lambda_{N+1} - \lambda_1)x_1 + (\lambda_{N+1} - \lambda_2)x_2 + \dots + (\lambda_{N+1} - \lambda_N)x_N = 0$$

Or, $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \ (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i \in \mathrm{SEP}(f, \lambda_i)$

Et, par hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i)$

D'après les propriétés des sommes directes :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \ (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i = 0$$

Et comme les valeurs propres sont deux à deux distinctes, on en déduit :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$$

Et comme : $x_{N+1} = -(x_1 + \dots + x_N) = 0$

On a donc l'implication : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i \in [\![1 ; N+1]\!]$

Donc d'après les propriétés des sommes directes :

$$\sum_{i=1}^{N+1} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{N+1} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i)$$

Ce qui est : $\wp(N+1)$

Le principe de récurrence permet de conclure :

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{SEP}(f, \lambda_i)$$

Exercice 2 *Avec des coefficients binomiaux*

Par la formule du binôme on sait que : $(1+X)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p X^p$

En particularisant $X = 1$, on obtient : $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = A + B + C$ (E_1)

En particularisant $X = \mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$, on obtient :

$$(1+\mathbf{j})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \mathbf{j}^p = \sum_{k=0}^{E(n/3)} C_n^{3k}\mathbf{j}^{3k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} C_n^{3k+1}\mathbf{j}^{3k+1} + \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} C_n^{3k+2}\mathbf{j}^{3k+2}$$

Or, $\mathbf{j}^{3k} = 1$, $\mathbf{j}^{3k+1} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}^{3k+2} = \bar{\mathbf{j}}$ et $1 + \mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$ d'où :

$$\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}n\pi}{3}} = A + \mathbf{j}B + \bar{\mathbf{j}}C \qquad (E_2)$$

En particularisant $X = \bar{\mathbf{j}} = \mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$, on obtient :

$$(1+\bar{\mathbf{j}})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \bar{\mathbf{j}}^p = \sum_{k=0}^{E(n/3)} C_n^{3k}\bar{\mathbf{j}}^{3k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} C_n^{3k+1}\bar{\mathbf{j}}^{3k+1} + \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} C_n^{3k+2}\bar{\mathbf{j}}^{3k+2}$$

Or, $\bar{\mathbf{j}}^{3k} = 1$, $\bar{\mathbf{j}}^{3k+1} = \bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{j}}^{3k+2} = \mathbf{j}$ et $1 + \bar{\mathbf{j}} = \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$ d'où :

$$\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}n\pi}{3}} = A + \bar{\mathbf{j}}B + \mathbf{j}C \qquad (E_3)$$

On résout maintenant le système constitué des équations (E_i), $i = 1, 2, 3$.

Comme $1 + \mathbf{j} + \bar{\mathbf{j}} = 0$, la combinaison $(E_1) + (E_2) + (E_3)$ donne :

$$3A = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

De plus, comme $\mathbf{j}\bar{\mathbf{j}} = 1$, la combinaison $(E_1) + \bar{\mathbf{j}}(E_2) + \mathbf{j}(E_3)$ donne :

$$3B = 2^n + \bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}n\pi}{3}} + \mathbf{j}\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}n\pi}{3}} = 2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}$$

Et enfin, la combinaison $(E_1) + \mathbf{j}(E_2) + \bar{\mathbf{j}}(E_3)$ donne :

$$3C = 2^n + \mathbf{j}\,\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}n\pi}{3}} + \bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}n\pi}{3}} = 2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}$$

D'où :

$$A = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$$

$$B = \frac{2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}}{3}$$

$$C = \frac{2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}}{3}$$

Par exemple, avec $n = 7$, on obtient $A = 43$, $B = 43$ et $C = 42$.

Exercice 3 *Recherche du développement limité de la fonction réciproque*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux) et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathbf{e}^{x^2} + 2x^2\mathbf{e}^{x^2}$$

On constate que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}$), elle est bijective. Son image $f(\mathbb{R})$ est égale $\mathbb{R}$.

Donc f admet une réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc sa réciproque f^{-1} l'est également.

Par ailleurs, f est impaire, donc f^{-1} l'est aussi.

Posons :
$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5)$$

Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on obtient :

$$x = f^{-1}(f(x)) = a\,x\mathbf{e}^{x^2} + b\,x^3\left(\mathbf{e}^{x^2}\right)^3 + c\,x^5\left(\mathbf{e}^{x^2}\right)^5 + o(x^5)$$

Or :
$$\mathbf{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

D'où :
$$x = ax\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right) + b\,x^3\left(1 + 3x^2\right) + c\,x^5 + o(x^5)$$

De l'unicité des coefficients de développement limité, on déduit :

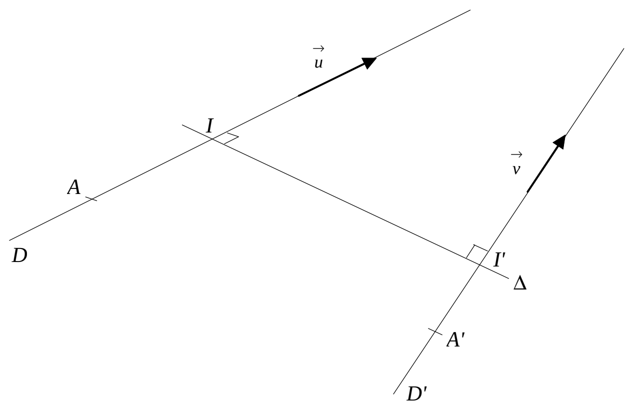
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ \dfrac{a}{2} + 3b + c = 0 \end{cases}$$

D'où :
$$b = -1,\ c = \frac{5}{2}$$

Finalement :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 4 *Théorème de la perpendiculaire commune*



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors D et D' sont parallèles. Il existe alors une infinité de perpendiculaires communes.

Si D et D' sont coplanaires (et donc sécantes en un point O puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires) alors la droite Δ passant par O et orthogonale au plan contenant D et D' convient et c'est la seule.

Pour la suite, on considère que D et D' ne sont pas coplanaires (donc non sécantes)

Soit I un point quelconque de D et I' un point quelconque de D'. (Et nécessairement $I' \neq I$)

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'I'}$

Notons, par ailleurs : $\overrightarrow{IA} = \alpha\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{A'I'} = \beta\,\vec{v}$

Ainsi : $\overrightarrow{II'} = \alpha\,\vec{u} + \overrightarrow{AA'} + \beta\,\vec{v}$

Montrons qu'il n'y a qu'un seul point I de D et un seul point I' de D' tels que (II') soit perpendiculaire à D et D'.

La condition $\overrightarrow{II'} \cdot \vec{u} = 0$ est équivalente à :

$$\alpha\,\vec{u}^{\,2} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{AA'} + \beta\,\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

La condition $\overrightarrow{II'} \cdot \vec{v} = 0$ est équivalente à :

$$\alpha\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{AA'} + \beta\,\vec{v}^{\,2} = 0$$

La droite (II') est donc une perpendiculaire commune à D et D' si et seulement si α et β sont solutions du système

$$(S) : \begin{cases} \alpha\,\vec{u}^{\,2} + \beta\,\vec{u} \cdot \vec{v} = -\,\vec{u} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ \alpha\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\,\vec{v}^{\,2} = -\,\vec{v} \cdot \overrightarrow{AA'} \end{cases}$$

Or, le déterminant δ de ce système est : $\delta = \vec{u}^{\,2} \times \vec{v}^{\,2} - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Et comme, par hypothèse, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte.

En conséquence ce déterminant est non nul.

Il existe donc un unique couple (α, β) satisfaisant les conditions $\overrightarrow{II'} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{II'} \cdot \vec{v} = 0$.

Autrement dit, il existe un unique point I de D et un unique point I' de D' tel que la droite $\Delta = (II')$ soit perpendiculaire à D et D'.

Remarque : en résolvant le système (S), on peut, en connaissant A, A', $\vec{u}$ et $\vec{v}$ construire la droite Δ.

Exercice 5 *Formule d'inversion de Pascal - Applications*

Notons $A_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. La relation $a_p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k b_k \quad \forall p \in [\![0, n]\!]$ se traduit alors matriciellement par :

$$A_n = M_n B_n \text{ avec } M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Les matrices M_n sont triangulaires, de déterminant 1, donc inversibles. En inversant M_n, on déduira une expression des b_p ($0 \leqslant p \leqslant n$) en fonction des a_p ($0 \leqslant p \leqslant n$). Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

On a donc :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = M_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix}$$

Pour déterminer M_n^{-1}, on décompose X^p ($0 \leqslant p \leqslant n$) dans la base ($1$, $(1 + X)$, $(1 + X)^2$, ..., $(1 + X)^n$) :

Pour cela, il suffit d'écrire :

$$X^p = (1 + X - 1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (-1)^{p-k} (1+X)^k$$

D'où :
$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ (-1)^n C_n^0 & (-1)^{n-1} C_n^1 & (-1)^{n-2} C_n^2 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$$

En conséquence :

$$b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k a_k \quad \forall p \in [\![0, n]\!]$$

Application 1 : nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal p.

Soit X un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et Y un ensemble de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$.

On note $S(n, p)$ le nombre de surjections de X sur Y.

Recherchons une expression de $S(n, p)$.

Pour cela, dénombrons de deux façons différentes le nombre d'applications f de X dans Y.

Soit f une application de X dans Y.

- Pour chacun des n éléments de X, nous pouvons associer l'un des p éléments de Y. D'après le principe multiplicatif, nous avons donc p^n façons de construire f.
- Nous pouvons dénombrer différemment : on sait que f définit une surjection de X sur $f(X)$. Notons k le cardinal de $f(X)$. On a donc : $1 \leqslant k \leqslant p$. Nous avons C_p^k façons de choisir les k éléments de $f(X)$ parmi les p éléments de Y. Et, avec nos notations, nous avons $S(n, k)$ façons de choisir une surjection de X dans un ensemble de cardinal k. En sommant, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} C_p^k S(n,k) \text{ applications de } X \text{ dans } Y.$$

Bilan :

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k S(n,k)$$

D'après la formule d'inversion de Pascal, on déduit :

$$S(n, p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n$$

Application 2 : nombre de dérangements d_n d'un ensemble X de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. (Est appelé dérangement de X toute bijection de X n'ayant aucun point fixe)

Soit $B_k(X)$ l'ensemble des bijections de X ayant k points fixes (pour $0 \leqslant k \leqslant n$)

On a : $$\text{Card}(B_k(X)) = C_n^{n-k} d_{n-k}$$

En effet, une bijection de X ayant k points fixes dérange $n - k$ éléments de X. Or, il y a C_n^{n-k} façons de choisir les $n - k$ éléments dérangés et d_{n-k} dérangements de l'ensemble de ces $n - k$ éléments.

En sommant, pour $k = 0$ à n :

$$\sum_{k=0}^{n} \text{Card}(B_k(X)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k$$

En outre, $$\sum_{k=0}^{n} \text{Card}(B_k(X)) = n!$$

On a donc : $$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k$$

Et d'après la formule d'inversion de Pascal :

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ce résultat a pour conséquence un curieux théorème dit "des chapeaux" (d'autres versions existent) :

n invités laissent leur chapeau au vestiaire et repartent en prenant un chapeau au hasard. La probabilité p_n qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas est :

$$p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Par exemple, $p_4 = \frac{3}{8}$. (On peut retrouver ce résultat à l'aide d'un arbre)

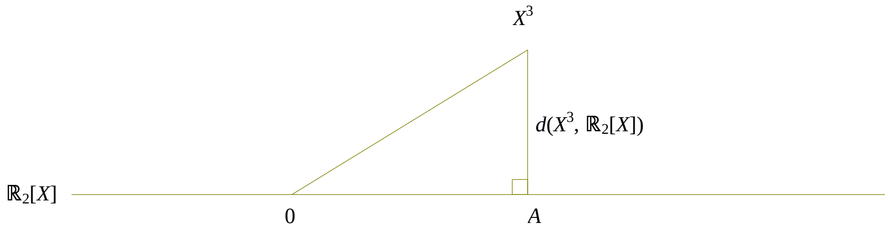
Et lorsque n tend vers l'infini, p_n tend vers $\frac{1}{\mathbf{e}}$.

Exercice 6 *Calcul d'une borne inférieure*

Notons $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ et $\|\ .\ \|$ la norme associée.

Notons $A = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, ainsi :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left[x^3 - (ax^2 + bx + c)\right]^2 \mathrm{d}x = \inf_{A\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - A\|^2 = [d(X^3, \mathbb{R}_2[X])]^2$$



La borne inférieure de $\|X^3 - A\|^2$ sera atteinte si et seulement si A est le projeté orthogonal de X^3 sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$, c'est-à-dire si et seulement si $X^3 - A$ est orthogonal à 1, X et X^2.

Or :
$$\begin{cases} (X^3 - A, 1) = 0 \\ (X^3 - A, X) = 0 \\ (X^3 - A, X^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A, 1) = (X^3, 1) \\ (A, X) = (X^3, X) \\ (A, X^2) = (X^3, X^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{a}{5} + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{3} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Le système obtenu est élémentaire (mais fastidieux) à résoudre. Un calculateur donne :

$$a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{3}{5} \text{ et } c = \frac{1}{20}$$

D'où :
$$A = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$$

Reste à calculer la valeur de cette borne inférieure à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left[x^3 - (ax^2 + bx + c)\right]^2 \mathrm{d}x = \|X^3\|^2 - \|A\|^2 = \int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{57}{400} = \frac{1}{2800}$$