

## SOMMAIRE

<b>1. Définition de la convexité</b>	<b>2</b>
1.1. Définition	2
1.2. Théorème : inégalité de Jensen	2
<b>2. Différentes caractérisations de la convexité</b>	<b>3</b>
2.1. Caractérisation 1 avec des pentes	3
2.2. Caractérisation 2 avec des pentes (variante)	4
2.3. Conséquence : une fonction convexe sur un intervalle $I$ est continue à l'intérieur de $I$	5
2.4. Caractérisation 3 pour les fonctions dérivables	6
2.5. Caractérisation 4 : les cordes sont au dessus des tangentes	6
2.6. Caractérisation 5 pour les fonctions deux fois dérivables	6
<b>3. Quelques propriétés des fonctions convexes</b>	<b>7</b>
3.1. Une fonction convexe et positive admettant deux zéros est nulle entre ces deux zéros	7
3.2. Une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante	8
3.3. Une fonction convexe, croissante et non constante sur $\mathbb{R}$ admet une limite infinie en $+\infty$	8
<b>4. Applications</b>	<b>9</b>
Moyennes arithmétiques et géométriques	9
Inégalité d'Hölder	10
Inégalité de Minkowski	10
<b>5. Annexe : autre démonstration de l'inégalité de Minkowski avec la convexité des fonctions positivement homogènes.</b>	<b>12</b>

## 1. Définition de la convexité

### 1.1. Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  lorsque :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0 ; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

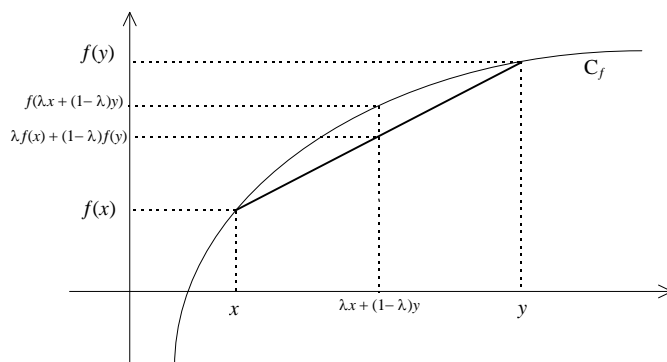
Lorsque l'on a l'inégalité dans l'autre sens, on dit que  $f$  est concave sur  $I$ .

Si l'inégalité est stricte, on parle alors de stricte convexité ou concavité.

Notons que  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $-f$  est convexe sur  $I$ .

Remarquons que si  $x = y$  ou si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$  alors l'inégalité  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  est triviale.

Illustration dans le cas d'une fonction concave : la courbe est au dessus de toute corde.



### Exemples :

- La fonction  $f : x \mapsto |x|$  est convexe puisque d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|$$

- La fonction  $f : x \mapsto x^2$  est convexe. En effet :

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1 - \lambda)xy - (1 - \lambda)^2 y^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)[x^2 - 2xy + y^2] = \lambda(1 - \lambda)(x - y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

### 1.2. Théorème Inégalité de Jensen

Soient  $f$  une fonction convexe définie sur un intervalle  $I$ ,  $x_1, \dots, x_n$  des points de  $I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels positifs vérifiant  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

En particulier :

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Preuve : par récurrence sur  $n$ . La formule est vraie pour  $n = 2$  (c'est la définition avec  $\lambda_1 = \lambda$  et  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ )

Considérons la propriété suivante :

$$H_n : \forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0; 1] \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ on a : } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

- Comme  $f$  est convexe sur  $I$ , on a :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

En posant  $x_1 = x, x_2 = y, \lambda_1 = \lambda$  et  $\lambda_2 = 1 - \lambda$  on obtient  $H_2$ .

- Supposons  $H_n$  vraie pour un certain entier  $n \geq 2$  et montrons que cela entraîne  $H_{n+1}$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0; 1]$  tels que  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ . Posons  $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

- \* Si  $S = 0$  alors  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et donc  $\lambda_{n+1} = 1$ .

L'inégalité  $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$  est alors vérifiée puisque trivialement réduite à  $f(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1})$ .

- \* Si  $S \neq 0$  alors posons pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mu_i = \frac{\lambda_i}{S}$ .

Ainsi, on a :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{S} = \frac{1}{S} \times S = 1$$

Ceci va permettre d'utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left(S \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + (1 - S)x_{n+1}\right) \text{ car } \lambda_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - S$$

Et comme  $f$  est convexe (ou d'après  $H_2$ ), on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq S f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) + (1 - S)f(x_{n+1})$$

Et comme  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$  et  $H_n$  est vraie par hypothèse de récurrence, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i)$$

Or,

$$S \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

D'où finalement :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Ce qui est  $H_{n+1}$ .

Le principe de récurrence achève la démonstration.

Le cas particulier en résulte en choisissant  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ .

Exemple :  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$  (convexité de  $x \mapsto x^2$ )

## 2. Différentes caractérisations de la convexité

### 2.1. Caractérisation 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \forall x, y, z \in I, x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Preuve :

$\Rightarrow$  Soient  $x, y, z \in I$  tels que  $x < y < z$ .

Puisque  $y \in ]x; z[$ , on peut écrire :

$$y = \lambda x + \mu z \quad \text{où } \lambda = \frac{z - y}{z - x} \text{ et } \mu = 1 - \lambda = \frac{y - x}{z - x} \in ]0; 1[$$

Comme  $f$  est convexe sur  $I$ , on a :

$$f(y) \leq \lambda f(x) + \mu f(z)$$

Ajoutons  $\lambda f(y)$  à chaque membre, ainsi :  $\lambda f(y) - \lambda f(x) \leq \mu f(z) - \mu f(y)$

$$\text{Soit en divisant par } \lambda \mu > 0 : \quad \frac{f(y) - f(x)}{\mu} \leq \frac{f(z) - f(y)}{\lambda}$$

$$\text{Or, } \lambda = \frac{z - y}{z - x}, \mu = \frac{y - x}{z - x} \text{ et } z - x > 0 \text{ d'où : } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

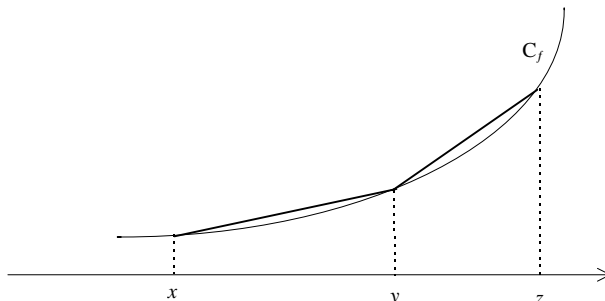
$\Leftarrow$  Soient  $x, z \in I$  avec (pour fixer les idées  $x < z$ , le cas  $x = z$  étant trivial) et soit  $\lambda \in ]0; 1[$ .

Posons  $y = \lambda x + \mu z$  où  $\mu = 1 - \lambda$ . Ainsi  $x < y < z$ .

$$\text{On a donc :} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$$\text{D'où :} \quad \lambda[f(y) - f(x)] \leq \mu[f(z) - f(y)] \text{ d'où } f(y) \leq \lambda f(x) + \mu f(z).$$

L'inégalité étant trivialement valable lorsque  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ , on en déduit que  $f$  est convexe sur  $I$ .



### 2.2. Caractérisation 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Pour tout  $\alpha \in I$  on pose  $\varphi_\alpha(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad \forall x \in I \setminus \{\alpha\}$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, \varphi_\alpha \text{ est croissante sur } I \setminus \{\alpha\}$$

Preuve :

$\Rightarrow$  Soient  $x, y \in I \setminus \{\alpha\}$  tels que  $x < y$ . Montrons que  $\varphi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(y)$

Supposons que l'on ait  $x < y < \alpha$ . Comme  $y \in ]x; \alpha[$ , on peut écrire :

$$y = \lambda x + \mu \alpha \quad \text{où } \lambda = \frac{\alpha - y}{\alpha - x} \in ]0; 1[ \text{ et } \mu = 1 - \lambda = \frac{y - x}{\alpha - x} \in ]0; 1[$$

Comme  $f$  est convexe sur  $I$ , on en déduit :  $f(y) \leq \lambda f(x) + \mu f(\alpha)$

Retranchons  $f(\alpha)$  à chaque membre :  $f(y) - f(\alpha) \leq \lambda[f(x) - f(\alpha)]$

$$\text{D'où } (x - \alpha < 0 \text{ et } y - \alpha < 0) : \quad \frac{f(y) - f(\alpha)}{y - \alpha} \geq \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$\varphi_\alpha(y) \geq \varphi_\alpha(x)$$

Le cas  $\alpha < x < y$  est analogue et le cas  $x < \alpha < y$  immédiat d'après la caractérisation 1.

Bilan : la fonction  $\varphi_\alpha$  est bien croissante sur  $I \setminus \{\alpha\}$ .

⇐ Soient  $x, y, z \in I$  tels que  $x < y < z$ .

Comme  $\varphi_y$  est croissante, on a  $\varphi_y(x) \leq \varphi_y(z)$  donc (caractérisation 1)  $f$  est convexe.

Remarque : évidemment, on a :  $f$  est concave sur  $I \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, \varphi_\alpha$  est décroissante sur  $I \setminus \{\alpha\}$

### 2.3. Conséquences

Soit  $f$  une fonction convexe sur  $I$ . Alors :

- 1)  $f$  admet en tout point  $\alpha$  intérieur à  $I$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche
- 2)  $f$  est continue en tout point  $\alpha$  intérieur à  $I$ .

Preuve :

1) Soit  $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ . La fonction  $\varphi_\alpha$  est croissante sur  $I \setminus \{\alpha\}$  et bornée au voisinage de  $\alpha$ . Elle admet donc une limite à droite et à gauche de  $\alpha$  (voir leçon sur les fonctions monotones). Donc  $f$  admet en  $\alpha$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche et comme  $\varphi_\alpha(\alpha^-) \leq \varphi_\alpha(\alpha^+)$ , on a  $f'_g(\alpha) \leq f'_d(\alpha)$

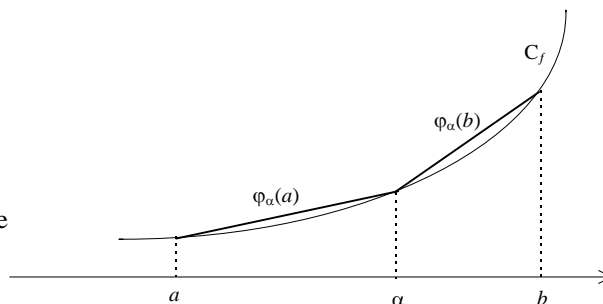
2) Soit  $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ . Donc  $\exists a, b \in I$  tels que  $a < \alpha < b$ .

La fonction  $\varphi_\alpha$  est croissante sur  $[a; \alpha[$  minorée par  $\varphi_\alpha(a)$  et majorée par  $\varphi_\alpha(b)$  :

$$\forall x \in [a; \alpha[ : \varphi_\alpha(a) \leq \varphi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(b)$$

De même sur  $] \alpha ; b]$ ,  $\varphi_\alpha$  est croissante et bornée (toujours par  $\varphi_\alpha(a)$  et  $\varphi_\alpha(b)$ ) :

$$\forall x \in ] \alpha ; b] : \varphi_\alpha(a) \leq \varphi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(b)$$



Bilan :  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in I \setminus \{\alpha\}$  on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq M|x - \alpha| \quad (M = \sup\{|\varphi_\alpha(a)| ; |\varphi_\alpha(b)|\})$$

Et comme l'inégalité ci-dessus est encore valable pour  $x = \alpha$ , on en déduit que  $f$  est continue en  $\alpha$ .

(En effet,  $\forall \varepsilon > 0$ , pour  $\eta < \frac{\varepsilon}{M}$ ,  $|x - \alpha| < \eta$  entraîne  $|f(x) - f(\alpha)| < M|x - \alpha| < M\eta < \varepsilon$ )

Remarque : il existe des fonctions convexes non continues. (Mais les points de discontinuité sont situés sur  $\text{Fr}(I)$ )

Par exemple la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in ]0 ; 1] \end{cases}$

En effet, on a toujours  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 0$  puisque  $\lambda x + (1 - \lambda)y \neq 0$  et  $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq 0$

Remarque : la conséquence 2.3. ci-dessus s'applique aussi aux fonctions concaves.

### 2.4. Caractérisation 3

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I$$

Preuve :

$\Rightarrow$  Soient  $a, b \in I$  avec  $a \leq b$ . Nous savons que  $f$  est dérivable sur  $I$  donc :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi_a(x) \text{ avec } f'(a) \leq \varphi_a(b) \text{ puisque } \varphi_a \text{ est croissante}$$

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \varphi_b(x) \text{ avec } f'(b) \geq \varphi_b(a) \text{ puisque } \varphi_b \text{ est croissante}$$

Et comme  $\varphi_a(b) = \varphi_b(a)$ , on a  $f'(a) \leq f'(b)$  donc  $f'$  est croissante sur  $I$ .

$\Leftarrow$  Soient  $a, b, c \in I$  avec  $a < b < c$ .

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à  $f$  sur  $]a; b[$  puis sur  $]b; c[$  :

$$\exists \alpha \in ]a; b[ \text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a) \text{ c'est-à-dire } f'(\alpha) = \varphi_b(a)$$

$$\exists \beta \in ]b; c[ \text{ tel que } f(c) - f(b) = f'(\beta)(c - b) \text{ c'est-à-dire } f'(\beta) = \varphi_b(c)$$

Or,  $f'$  est croissante et  $\alpha < \beta$  donc  $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$  c'est-à-dire  $\varphi_b(a) \leq \varphi_b(c)$ .

Ainsi, d'après la caractérisation 1,  $f$  est convexe.

Et pour les fonctions concaves, on a :  $f$  est concave sur  $I \Leftrightarrow f'$  est décroissante sur  $I$

On a vu, que la convexité se traduit par le fait que les cordes sont au dessus du graphe. La caractérisation suivante valable pour une fonction dérivable traduit la convexité par le fait que les tangentes sont en dessous du graphe.

### 2.5. Caractérisation 4

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha)$$

Preuve :

$\Rightarrow$  Soit  $\alpha \in I$  et soit  $x \in I$ . Si  $x = \alpha$ , l'inégalité est triviale.

Si  $x > \alpha$ , alors  $f'(\alpha) = \varphi_\alpha(\alpha^+) \leq \varphi_\alpha(x)$  car  $\varphi_\alpha$  est croissante.

D'où 
$$f'(\alpha) \leq \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

C'est-à-dire : 
$$f(x) \geq f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha)$$

Si  $x < \alpha$ , alors  $\varphi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(\alpha^-) = f'(\alpha)$  d'où :

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq f'(\alpha)$$

Et comme  $x - \alpha < 0$  : 
$$f(x) \geq f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha)$$

$\Leftarrow$  Soient  $x, y \in I$  avec  $x \leq y$ . On a donc, par hypothèse :

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x) \text{ et } f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$$

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Donc  $f'$  est croissante et donc  $f$  est convexe.

Notons que l'inégalité est tournée dans l'autre sens en cas de concavité.

### 2.6. Caractérisation 5

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ sur } I$$

Preuve :  $f$  convexe sur  $I \Leftrightarrow f'$  croissante sur  $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$  sur  $I$

Et évidemment on a :  $f$  concave sur  $I$  si et seulement si  $f'' \leq 0$  sur  $I$

Exemples :

- La fonction exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $\ln$  est concave sur  $]0 ; +\infty[$ .
- La fonction sinus est concave sur  $[0 ; \pi]$ ; la fonction cosinus concave sur  $[0 ; \frac{\pi}{2}]$  et convexe sur  $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$ .
- Cas des fonctions puissances :  $f : x \mapsto x^h$  pour  $h \in ]0 ; +\infty[$ .  $f$  est de classe  $C^\infty$  et on a :

$$f''(x) = h(h-1) x^{h-2} \quad \forall x > 0$$

D'où :  $f$  convexe  $\Leftrightarrow h \leq 0$  ou  $h \geq 1$

$$f \text{ concave} \Leftrightarrow h \in [0 ; 1]$$

Etc.

## 3. Quelques propriétés des fonctions convexes

### 3.1. Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , convexe, positive et admettant deux zéros distincts  $t_1 < t_2$ . Alors  $f$  est nulle sur  $[t_1 ; t_2]$ .

Preuve :

Par l'absurde, si  $f$  n'est pas nulle sur  $[t_1 ; t_2]$  alors :

$$\exists t \in [t_1 ; t_2] \text{ tel que } f(t) > 0$$

Ce qui entraînerait :

$$\varphi_i(t_1) = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = -\frac{f(t)}{t_1 - t} > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_i(t_2) = \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t} = -\frac{f(t)}{t_2 - t} < 0$$

Ce qui contredit 2.2. ( $\varphi_i$  croissante)

### 3.2. Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , convexe et majorée. Alors  $f$  est constante.

Preuve :

Soit  $M$  un réel tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

Considérons  $\varphi_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Pour  $x > 0$ , on a :  $\varphi_0(x) \leq \frac{M - f(0)}{x}$

$\varphi_0$  est croissante sur  $\mathbb{R}^*$  donc admet une limite en  $+\infty$  et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_0(x) \leq 0$$

Pour  $x < 0$ , on a :  $\varphi_0(x) \geq \frac{M - f(0)}{x}$

$\varphi_0$  est croissante sur  $\mathbb{R}^*$  donc admet une limite en  $-\infty$  et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_0(x) \geq 0.$$

Donc  $\varphi_0$  est nulle sur  $\mathbb{R}^*$  et, par suite :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$

On a prouvé que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

Notons que ce résultat ne subsiste pas si  $f$  n'est définie que sur une partie de  $\mathbb{R}$  :

Prendre  $f : x \in [0, +\infty[ \mapsto \frac{1}{1+x}$  qui est convexe et majorée par 1 et pourtant non constante

### 3.3. Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , convexe et croissante et non constante. Alors  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

Preuve :

Puisque  $f$  est croissante,  $\lim_{+\infty} f$  existe.

Si  $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{+\infty} \varphi_0 = 0$ . Or  $\varphi_0(1) = f(1) - f(0) \geq 0$  puisque  $f$  est croissante. Et comme  $\varphi_0$  est croissante, on a  $\varphi_0$  nulle sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $f$  constante sur  $\mathbb{R}$ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

#### 4. Applications

Démontrer que la fonction  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}^*$ .

La fonction exponentielle étant convexe, on a en utilisant la caractérisation 2 pour  $\alpha = 0$  :

$$\varphi_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

D'où le résultat.

Démontrer que la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est décroissante sur  $]0 ; \pi]$ .

La fonction sinus étant concave sur  $]0 ; \pi]$ , on a d'après la caractérisation 2 pour  $\alpha = 0$  :

$$\varphi_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

D'où le résultat.

Démontrer que  $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ ,  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Comme la fonction sinus est concave sur  $[0 ; \pi]$ , on a :

$$\sin(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \sin x + (1 - \lambda) \sin y$$

Avec  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = 0$  et  $\lambda = \frac{2}{\pi}x \in [0 ; 1]$ , il vient :

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$$

De plus, d'après 2.5. le graphe de la fonction sinus est en dessous de ses tangentes (concavité) :

$$\sin x \leq \sin \alpha + (x - \alpha) \cos \alpha$$

Avec  $\alpha = 0$ , il vient :

$$\sin x \leq x$$

#### MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

La moyenne arithmétique de  $n$  nombres réels strictement positifs est toujours au moins égale à la moyenne géométrique de ces nombres :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in ]0 ; +\infty[ : \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

Preuve :

La fonction  $\ln$  est concave sur  $]0 ; +\infty[$  donc :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in ]0 ; +\infty[ \text{ et } \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0 ; 1] \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 : \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n$$

En composant par la fonction exponentielle qui est croissante :  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$

En choisissant  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ , on obtient :

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

### INÉGALITÉ DE HÖLDER

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Soient également  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$   $2n$  nombres réels strictement positifs. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve :

Comme  $p > 1$  la fonction puissance  $f : x \mapsto x^p$  est convexe sur  $]0 ; +\infty[$ . On a donc :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in ]0 ; +\infty[ \text{ et } \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0 ; 1] \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 : f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p$$

En particulier pour  $x_i = \frac{a_i}{b_i^{q-1}}$  et  $\lambda_i = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$  il vient :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p b_i^{q-p(q-1)}}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

Or,  $q - pq + p = 0$  puisque  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  d'où :  $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n a_i^p \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{p-1}$

Puis en extrayant les racine  $p^{\text{èmes}}$  des deux membres (la fonction  $u \mapsto u^{\frac{1}{p}}$  étant croissante car  $p > 1$ ) et en

remarquant que  $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$ , il vient :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Cas particulier : pour  $p = q = 2$ , on récupère l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $\langle a | b \rangle \leq \|a\| \|b\|$  (pour la structure euclidienne usuelle de  $\mathbb{R}^n$ )

### INÉGALITÉ DE MINKOWSKI

Soit  $p > 1$  et soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$   $2n$  nombres réels strictement positifs. Alors on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$ .  $f$  est de classe  $C^\infty$  et on a :

$$f'(x) = x^{\frac{1}{p}-1} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} + x^{\frac{1}{p}-1} \frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-1} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}$$

$$f''(x) = \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} \left[1 + x^{\frac{1}{p}} - x^{\frac{1}{p}}\right] = \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} \leq 0 \quad \text{car} \quad 1-p \leq 0$$

Donc  $f$  est concave sur  $]0 ; +\infty[$ . D'où

$$\forall x_1, \dots, x_n \in ]0 ; +\infty[ \text{ et } \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0 ; 1] \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 : \left(1 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(1 + x_i^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

c'est-à-dire :

$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{\frac{1}{p}} + (\lambda_i x_i)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

Soient alors  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$   $2n$  nombres réels strictement positifs. Posons :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i^p \quad \text{et} \quad \lambda_i = \frac{a_i^p}{S} \quad (\text{ainsi } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1) \quad \text{et} \quad x_i = \frac{b_i^p}{a_i^p}$$

D'où :

$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i^p}{S}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{S^{\frac{1}{p}}} + \frac{b_i}{S^{\frac{1}{p}}}\right)^p$$

En multipliant tout par  $S$ , il vient :

$$\left(S^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p$$

Puis en extrayant les racine  $p^{\text{èmes}}$  des deux membres, (la fonction  $u \mapsto u^{\frac{1}{p}}$  étant croissante car  $p > 1$ ) :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cas particulier : si  $p = 2$  on récupère l'inégalité triangulaire :  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

## AUTRE DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ DE MINKOWSKI À L'AIDE D'UN THÉOREME SUR LA CONVEXITÉ DES FONCTIONS POSITIVEMENT HOMOGÈNES

### Définition

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

On dit que  $f$  est positivement homogène si :

$$(\forall x \in E), (\forall \lambda \in \mathbb{R}^+) : \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Exemple :  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  est positivement homogène,  $\forall p \in ]0 ; +\infty[$ .

### Théorème

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application positivement homogène.

1)  $f$  convexe sur  $E \Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

2) De plus, si  $f \geq 0$  sur  $E$  :

$$f \text{ convexe sur } E \Leftrightarrow B = \{x \in E \mid f(x) \leq 1\} \text{ convexe}$$

### Démonstration :

1)  $\Rightarrow$  : Soient  $x, y \in E$ . Comme  $f$  est convexe, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

Et comme  $f$  est positivement homogène, il vient :

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

$\Leftarrow$  : Soient  $x, y \in E$ , et  $\lambda, \mu \in [0 ; 1]$  tels que  $\lambda + \mu = 1$ .

Par hypothèse, on a :  $f(\lambda x + \mu y) \leq f(\lambda x) + f(\mu y)$

Et comme  $f$  est positivement homogène :  $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$

Donc  $f$  est convexe sur  $E$

2)  $\Rightarrow$  : Soient  $x, y \in B$ , et  $\lambda, \mu \in [0 ; 1]$  tels que  $\lambda + \mu = 1$ .

Par hypothèse, on a :  $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$

Et comme  $x, y \in B$  :  $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda + \mu \leq 1$

Donc  $\lambda x + \mu y \in B$ , donc  $B$  est convexe.

**Notons que la démonstration ci-dessus n'utilise pas l'homogénéité de  $f$ .**

$\Leftarrow$  : Soient  $x, y \in E$ . Il suffit, d'après 1) de montrer que  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

Soient  $\alpha \in ]f(x) ; +\infty[$  et  $\beta \in ]f(y) ; +\infty[$ . Ainsi, on a :

$$\frac{f(x)}{\alpha} < 1 \text{ et } \frac{f(y)}{\beta} < 1$$

C'est-à-dire,  $f$  étant homogène :  $f\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1$  et  $f\left(\frac{y}{\beta}\right) < 1$

Donc,  $\frac{x}{\alpha}$  et  $\frac{y}{\beta}$  sont éléments de  $B$ . Ce dernier étant convexe, on a :  $\forall \lambda, \mu \in [0 ; 1]$  tels que  $\lambda + \mu = 1$  :

$$\lambda \frac{x}{\alpha} + \mu \frac{y}{\beta} \in B,$$

En particulier, en choisissant  $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  et  $\mu = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ , il vient :

$$\frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{y}{\alpha + \beta} \in B$$

Autrement dit,  $f$  étant positivement homogène :  $f(x + y) \leq \alpha + \beta$

En passant à la limite (lorsque  $\alpha$  tend vers  $f(x)$  et lorsque  $\beta$  tend vers  $f(y)$ ), il vient :

$$f(x + y) \leq \alpha + \beta$$

C'est-à-dire  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  et d'après 1),  $f$  est convexe sur  $E$ .

### Démonstration de l'inégalité de Minkowski :

On considère l'application :  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  ou  $p \in [1 ; +\infty[$ .

Déjà, Comme  $p \geq 1$ ,  $f^p$  est convexe :

Considérons, pour tout  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  les fonctions suivantes :

$$g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto |x_i|^p \quad \text{et} \quad h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_i \mapsto |x_i|^p.$$

Les fonctions  $h_i$  sont convexes sur  $\mathbb{R}_+$  (puisque dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  lorsque  $p > 1$  et  $h_i'(x_i) = px_i^{p-1}$  avec  $h_i'$  croissante sur  $[0 ; +\infty[$  avec le prolongement  $h_i'(0) = 0$ ). Par parité, on en déduit que les fonctions  $h_i$  sont convexes sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit que les fonctions  $g_i$  sont convexes sur  $\mathbb{R}^n$  :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall (\lambda, \mu) \in [0 ; 1]^2$  tels que  $\lambda + \mu = 1$ , on a :  $g_i(\lambda x + \mu y) = |\lambda x_i + \mu y_i|^p = h_i(\lambda x_i + \mu y_i) \leq \lambda h_i(x_i) + \mu h_i(y_i) = \lambda g_i(x) + \mu g_i(y)$ .

Donc, d'après le théorème (assertion 2  $\Rightarrow$ ) appliqué à  $f^p$  qui est convexe, l'ensemble  $B_p = \{x \in E \mid f^p(x) \leq 1\}$  est convexe.

Or,  $f^p(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ , donc  $B_p = \{x \in E \mid f(x) \leq 1\}$ . Ce dernier étant convexe, on en déduit d'après le théorème (assertion 2  $\Leftarrow$ ) que  $f$  est convexe d'où (théorème assertion 1  $\Rightarrow$ ) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

Ce qui s'écrit encore (en notant  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ) :

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$