438. Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, u un endomorphisme de E.

a) On suppose que u est symétrique. En utilisant une base orthonormale convenable pour E, **montrer que $\|u\|$ est la plus grande valeur absolue des valeurs propres de u.**

b) *On ne suppose plus que u est symétrique, et on pose $v = {}^t u \circ u$.* Montrer que $\|u\|^2 \leq \|v\|$.
Soit λ la plus grande valeur propre de v.
Montrer que $\|u\|^2 \geq \lambda \geq 0$ et en déduire $\|u\|$.

Exercice 2 :

On considère $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $\|\ .\ \|_\infty$: Si x a pour coordonnées $(x_1, \ldots x_n)$ dans la base canonique, $\|x\|_\infty = \sup_{i=1\ldots n} |x_i|$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, et soit $(a_{i,j})$ sa matrice dans les bases canoniques.

Montrer que $\|u\| = \sup_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

Exercice 3 :

1) **Montrer que l'application ϕ** qui à tout couple de matrices (A,B) de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ fait correspondre la trace de $A.{}^tB$ **définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.** On note $\|\ .\ \|_2$ la norme ainsi définie.
2) **En déduire que $(\mathrm{tr}\ A)^2 \leq n\ \mathrm{tr}\ (A.\ {}^tA)$.**
3) **Justifier la continuité de l'application trace** de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et **calculer la norme** de cette application linéaire continue, subordonnée à la norme euclidienne définie ci-dessus.

Exercice 4 :

On note E l'espace vectoriel des applications numériques continues sur [0 ;1].
On définit sur E la norme : $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.
On définit l'application P qui à toute application f de E fait correspondre l'application g, primitive de f sur [0 ;1] qui s'annule en 0 : $\big(P(f)\big)(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) **Montrer que P est un endomorphisme continu de E.**
2) **Calculer la norme de P.**

Exercice 5 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de [-1 ;1] dans $\mathbb{C}$, muni de la norme sup : $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1;1]} |f(t)|$
Soit F l'espace vectoriel des fonctions 2π- périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on munit soit de la norme N_2 telle que $N_2(f) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt}$, soit de la norme sup N_∞ :

$N_\infty(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Soit $L : E \to F$ l' application définie par $\big(L(f)\big)(t) = f(\cos(t))$

1) **Montrer que L est bien définie, est linéaire et injective.**
2) **Montrer que L est continue** pour chacune des normes N_2 et N_∞ de F, et calculer pour chacune de ces normes **$\|L\|_2$ et $\|L\|_\infty$**

Commentaires sur la leçon 438.

Avant de commencer il faut se rappeler quelques points :
Soit u une application linéaire de E dans F avec $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$.
Alors on définit une norme sur l'ensemble des applications linéaires de E dans F par l'une des trois définitions équivalentes suivantes : $\|u\| = \text{Sup}_{(\|x\|=1)} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \text{Sup}_{(\|x\|\leq 1)} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \text{Sup}_{(x\neq 0)} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$
f est continue si et seulement si $\|f\| < \infty$
Relations fondamentales : pour tout x de E, $\|u(x)\|_F \leq \|u\|\,\|x\|_E$ et $\|u \circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|$
Si E est de dimension finie alors toutes les applications linéaires sont continues.

<u>Exercice 1 :</u>

- Cet exercice fait le lien entre les valeurs propres d'un endomorphisme et sa norme dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
- On se place d'abord dans le cas d'un endomorphisme symétrique (donc diagonalisable), on montre que $\|u\| \leq$ à un certain M puis que cette valeur M est atteinte : c'est donc la norme de u.
- Puis on se place dans le cas général en posant pour un endomorphisme quelconque u $v = {}^t u \circ u$. On utilise alors la définition de l'adjoint d'un endomorphisme :

$<u(x) ; y> = <x ; {}^t u(y)>$, associé à l'inégalité de Cauchy Schwartz et à la propriété $\|u \circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|$

- J'ai choisi cet exercice parce qu'il est classique et qu'il illustre le lien entre valeur propre et norme.

<u>Exercice 2 :</u>

- J'ai choisi cet exercice car il illustre le lien entre les coefficients de la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ muni de la norme sup dans une base.
- Dans cet exercice, la norme est calculée en montrant que $\|u\| \leq M$ puis que $\|u\| \geq M$, en utilisant un x_0 de norme 1 tel que $\|u(x_0)\| \geq M$

<u>Exercice 3 :</u>

- J'ai choisi cet exercice car il fait calculer la norme d'une forme linéaire connue de $M_n(\mathbb{R})$ (trace) en utilisant un produit scalaire différent de ceux usuels.
- On utilise à nouveau l'inégalité de Cauchy –Schwartz.
- Dans cet exercice, la norme est obtenue en la majorant par un réel, puis en exhibant un élément de norme 1 de $M_n(\mathbb{R})$ pour lequel la norme de u est atteinte.

<u>Exercice 4 :</u>

- J'ai choisi cet exercice car l'espace vectoriel à l'intérieur duquel on travaille est un espace fonctionnel, de dimension infinie contrairement aux précédents. On le munit de la norme L_1 usuelle.
- On vérifie d'abord la linéarité (évidente) de l'application considérée, qui consiste à prendre la primitive de la fonction qui s'annule en 0.
- Puis on vérifie que sa norme est majorée par 1.
- On conclut en exhibant une suite de fonctions f_n de E , toutes de normes 1, et pour lesquelles le sup de la norme est 1. et donc en minorant par 1 la norme de l'endomorphisme..

Exercice 5 :

- J'ai choisi cet exercice car il est nouveau dans des espaces fonctionnels, de dimension infinie. Les espaces vectoriels source et but sont différents.
- On calcule la norme d'un même endomorphisme pour deux normes différentes de l'espace fonctionnel d'arrivée.
- Pour l'une de ces normes, la norme correspondante de l'opérateur est obtenue directement.
- La deuxième est obtenue à nouveau en la majorant puis en exhibant un élément de E de norme 1 et pour laquelle la norme est atteinte.
- On s'aperçoit alors que la valeur de la norme de l'opérateur diffère selon la norme choisie au début.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 :

1) u est un endomorphisme symétrique de E donc est diagonalisable dans une base orthonormale. Sa matrice dans une telle base est donc de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 \ 0 \ \ldots\ldots \ 0 \\ 0 \ \lambda_2 \ \ldots\ldots \ 0 \\ 0 \ \ldots\ldots \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont les valeurs propres non nécessairement distinctes de u.

Soit $x = (x_1, \ldots x_n)$ dans cette base.

Alors $||u(x)||^2 = || \lambda_1 x_1 e_1 + \ldots + \lambda_n x_n||^2 = \lambda_1^2 x_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 x_n^2$.

Soit μ la valeur propre de plus grande valeur absolue et soit $\lambda = |\mu|$: Alors $||u(x)|| \leq \lambda \, ||x||$

Donc Sup $||u(x)|| \leq \lambda$.

Il existe i_0 tel que $\lambda = |\lambda_{i0}|$. Alors $||u(e_{i0})|| = |\lambda|$.

$\boxed{\textbf{Donc } ||\mathbf{u}|| = \textbf{sup } ||\mathbf{u(x)}|| = \boldsymbol{\lambda}.}$

2) v est symétrique car ${}^t({}^tu \circ u) = {}^tu \circ u$.

soit $x \in E$: $||u(x)||^2 = \langle u(x) \,;\, u(x)\rangle = \langle x \,;\, {}^tu \circ u(x)\rangle$ par définition de la transposée d'un endomorphisme.

$||u(x)||^2 = \langle x \,;\, v(x)\rangle$

Donc $||u(x)||^2 \leq ||x|| \, ||v(x)||$ d'après le propriété de Cauchy – Schwartz.

Soit Sup $||u(x)||^2 \leq$ Sup $||v(x)||$

$\boxed{\textbf{Donc } ||\mathbf{u}||^2 \leq ||\mathbf{v}||}$

Démontrons que toutes les valeurs propres de v sont positives :

Soit λ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé :

$\langle x \,;\, v(x) \rangle = \langle x \,;\, {}^tu \circ u(x)\rangle = \langle u(x) \,;\, u(x)\rangle = ||u(x)||^2$

$\langle x \,;\, v(x) \rangle = \langle x \,;\, \lambda x\rangle = \lambda \langle x \,;\, x\rangle = \lambda \, ||x||^2$

Des deux égalités précédentes on en déduit que $\boxed{\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda}} = ||v||$ d'après ce qui précède.

Soit $x \in E$: $||v(x)||^2 = \langle v(x) \,;\, v(x)\rangle = \langle v(x) \,;\, {}^tu \circ u(x)\rangle = \langle u \circ v(x) \,;\, u(x)\rangle$ par définition de la transposée d'un endomorphisme.

Donc $||v(x)||^2 \leq ||u \circ v(x)|| \,.\, ||u(x)|| \leq ||u|| \, ||v(x)|| \,.\, ||u(x)||$

Donc $||v(x)||^2 \leq ||u||^2 \, ||v|| \, ||x||^2$.

Donc $||v||^2 \leq ||u||^2 \, ||v||$.

Donc $\boxed{||\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}||^2}$: $\lambda \leq ||u||^2$

On en déduit que $\lambda = ||u||^2$ soit $\boxed{||\mathbf{u}|| = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}}$ puisque $\lambda \geq 0$.

Exercice 2 :

$$\|u\| = \operatorname{Sup} \|u(x)\| = \operatorname{Sup} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right|$$

Or $\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$.

Donc $\|u\| \leq \sup \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$.

Soit i_0 tel que $\sup \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | = \sum_{j=1}^{n} | a_{i0j} |$

Soit $x = (x_1,...,x_n)$ tel que $x_j = 0$ si $a_{i0j} = 0$ et $\frac{\overline{a_{i0j}}}{|a_{i0j}|}$ si $a_{i0j} \neq 0$.

Alors $\|x\| = 1$.

$$\|u\| \geq \|u(x)\| = \operatorname{Sup} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i0j}\, x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} |a_{i0j}| \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i0j}| = \sup \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\boxed{\textbf{Donc } \|\mathbf{u}\| = \sup \sum_{j=1}^{n} | \mathbf{a_{ij}} |}$$

Exercice 3 :

1) Soit $A = (a_{ij})$. Alors $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Donc l'application trace est linéaire.

Les coefficients diagonaux de $C = A.{}^tB$ sont égaux à $c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{ij}$.

Donc $\phi(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{ij}$.

On en déduit que ϕ est symétrique.

$\phi(\mu A + \mu' A',B) = tr\big((\mu A + \mu' A').{}^tB\ \big) = tr\ \big(\mu A.{}^tB + \mu' A'.{}^tB\big)$.

L'application trace est linéaire donc $\phi(\mu A + \mu' A',B) = \mu tr(A.{}^tB) + \mu' tr(A'{}^tB)$: ϕ est linéaire à gauche donc bilinéaire puisque symétrique.

$\phi(A,A) = tr(A.{}^tA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$ donc ϕ est positive.

De même il est évident que $\phi(A,A) = 0$ ssi $a_{ij} = 0$ tt i,j

Donc ϕ est définie :

ϕ est une application bilinéaire symétrique définie positive sur $M_n(\mathbb{R})$:

$\boxed{\boldsymbol{\phi} \textbf{ est un produit scalaire sur } \mathbf{M_n(\mathbb{R})}.}$

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet alors d'écrire que, pour tout couple de matrices (A,B) de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$, $\phi(A,B)^2 \leq \|A\|_2^2 . \|B\|_2^2$.

Soit $B = I_n$ alors $A.{}^tB = A$, $B.{}^tB = I_n$ et $tr(I_n) = n$.

$\boxed{\textbf{Donc } \mathbf{tr(A)^2 \leq n.\ tr(A.{}^tA)}}$

3) L'inégalité démontrée ci-dessus s'écrit aussi : $|tr(A)| \leq \sqrt{n}\ \|A\|_2$.

Soit, pour $\|A\|_2 = 1$, $|tr(A)| \leq \sqrt{n}$. On en déduit que $\|tr\| \leq \sqrt{n}$.

Soit A = $\frac{1}{\sqrt{n}}$ In Alors $||A||_2^2 = tr(A.^tA) = n \times \frac{1}{n} = 1$ et $tr(A) = \sqrt{n}$.

Donc il existe une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $||A||_2 = 1$ et $tr(A) = \sqrt{n}$

$\boxed{\textbf{Donc } ||tr|| = \sqrt{n}.}$

Exercice 4 :

1) P est une application linéaire, c'est évident par linéarité de l'intégrale.
Si g = P(f), g est la primitive s'annulant en 0 d'une application continue. Elle est donc continue.

P est donc une application linéaire de E dans E. **C'est un endomorphisme de E.**

On calcule $N(g) = \int_0^1 |g(t)|\, dt = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|dt\, dx$.

Donc $N(g) \leq \int_0^1 N(f)\, dx = N(f)$

Donc $N(P(f)) \leq N(f)$ pour tout f de E.

P est donc continu.

2) La norme de P subordonnée à N sera notée ||P||.
$||P|| = \{ \text{Sup } N(P(f)) , f \in E \text{ et } N(f) = 1 \}$

Si N(f) = 1, d'après l'inégalité montrée à la question précédente, $N(P(f)) \leq 1$
donc $||P|| \leq 1$

Soit (f_n) la suite d'applications qui à tout t de [0 ; 1] fait correspondre $(n + 1) (1 - t)^n$
Alors $N(f_n) = \int_0^1 (n + 1) (1 - t)^n dt = \left[-(1 - t)^{n+1}\right]_0^1 = 1$: $N(f_n) = 1$.

Soit g_n la primitive de f_n qui s'annule en 0. g_n est l'application qui à tout x de [0 ; 1] fait correspondre $(1 - (1 - x)^{n+1})$.

$N(P(f_n)) = N(g_n) = \int_0^1 |1 - (1 - t)^{n+1}|dt = \int_0^1 (1 - (1 - t)^{n+1})dt = \left[t + \frac{(1 - t)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 =$

$1 - \frac{1}{n+2}$: $N(P(f_n)) = 1 - \frac{1}{n+2}$

On en déduit que, pour cette suite d'applications f_n on a $N(f_n) = 1$ et Sup $\{ N(P(f_n)) \} = 1$.

Or l'ensemble des f_n définies ainsi est inclus dans l'ensemble des éléments de E de norme 1 : Donc Sup $\{N(P(f_n))\} \leq$ Sup $\{N(P(f)/f \in E \text{ et } N(f) = 1\}$

Donc Sup $\{N(P(f)/f \in E \text{ et } N(f) = 1\} \geq 1$: $\boxed{||P|| = 1}$.

Exercice 5 :

1) Soit $f \in E$: L(f) est continue sur $\mathbb{R}$ par composition , et est 2π - périodique.
La linéarité de L est évidente.
L étant linéaire, il suffit de vérifier que 0 a un seul antécédent par L.
Supposons que L(f) = 0 : Pour tout t de $\mathbb{R}$, f(cos(t)) = 0. Donc en particulier pour tout t de [0 ; π], f(cos(t)) = 0.
Or la fonction cos est une bijection de [0; π] dans [-1 ; 1]
Donc f(cos(t)) = 0 pour tout t de [0 ;π] si et seulement si f(u) = 0 pour tout u de [-1 ; 1]
Donc f(u) = 0 pour tout u de [-1 ;1] : f = 0 et **L est injective.**

2) Supposons que l'on munisse F de la norme N_2.

$N_2(L(f))^2 = \dfrac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos(t))|^2\, dt \leq \dfrac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ||f||^2_\infty\, dt = \dfrac{1}{2\pi}\, ||f||^2_\infty$.

Donc $N_2(L(f)) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, ||f||_\infty$.

On en déduit que L est continue si l'on munit F de la norme N_2, et que $||L||_2 \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Soit f la fonction identiquement égale à 1 sur [-1 ; 1] : $f \in E$ et $||f||_\infty = 1$.

$N_2(L(f))^2 = \dfrac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \dfrac{1}{2\pi}$ donc $N_2(L(f)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$: donc $\boxed{\mathbf{||L||_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}}}$

$N_\infty(L(f)) = \text{Sup}\ (t \in \mathbb{R})\ |f(\cos(t))| = \text{Sup}\ (t \in [0 ;\pi])\ |f(\cos(t))|$ puisque la fonction cosinus est 2π périodique et paire.
Donc $N_\infty(L(f)) = \text{Sup}\ (u \in [-1 ;1])\ |f(u)| = ||f||_\infty$.

$\boxed{\textbf{Donc L est continue pour } \mathbf{N_\infty} \textbf{ et } \mathbf{||L||_\infty = 1}}$.