ÉTUDE DE SUITES NUMÉRIQUES DÉFINIES PAR DIFFÉRENTS TYPES DE RÉCURRENCE

SOMMAIRE

1. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Contexte :

I est un intervalle non vide et non réduit à un point.

f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

On étudie les propriétés de la suite (u_n) "définie" par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On a bien dit "définie" (entre guillemets) car il se peut justement qu'une telle suite ne soit plus définie à partir d'un certain rang. Donnons tout de suite un tel exemple pathologique :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{81}{80} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n} \end{cases}$$

Pour construire un tel exemple, rien de plus simple ! On calcule les antécédents successifs, par f, d'un y appartenant à $\mathrm{Im}\, f \setminus D_f$. (Ici, $y = 3/2$)

On calcule alors : $u_1 = \dfrac{27}{26}$; $u_2 = \dfrac{9}{8}$; $u_3 = \dfrac{3}{2}$

À partir de $n = 4$, cette suite n'est plus définie !

1.1. Limite éventuelle

1.1. Théorème *Limite éventuelle*

$$\text{Si } \begin{cases} f(I) \subset I \\ f \text{ continue sur } I \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in I \end{cases}, \text{ alors } f(\ell) = \ell$$

> Dit simplement :
> Dans les conditions ad hoc, si (u_n) converge, c'est nécessairement vers l'un des points fixes de f.

Démonstration :

Comme $f(I) \subset I$, la suite (u_n) est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Comme (u_n) converge vers ℓ et que f est continue en $\ell \in I$, un passage à la limite dans l'égalité ci-dessus donne :

$$\ell = f(\ell)$$

1.2. Monotonie de la suite (u_n)

1.2.1. Théorème

$$\text{Si } \begin{cases} f(I) \subset I \\ f \text{ strictement croissante sur } I \end{cases}, \text{ alors } (u_n) \text{ est monotone.}$$

Plus précisément :

$u_0 < f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ strictement croissante

$u_0 = f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ constante

$u_0 > f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ strictement décroissante

> On a un théorème analogue en remplaçant la stricte monotonie par la monotonie au sens large.

Démonstration :

La condition $f(I) \subset I$ assure que la suite (u_n) est bien définie.

Distinguons trois cas :

1) $u_1 = u_0$

Par récurrence facile, il vient alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$

Donc la suite (u_n) est constante.

2) $u_1 > u_0$

Considérons la propriété : $\wp(n) : u_{n+1} > u_n$

- On a $\wp(0)$ par hypothèse.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $u_{n+1} > u_n$

  Comme f est strictement croissante sur I :

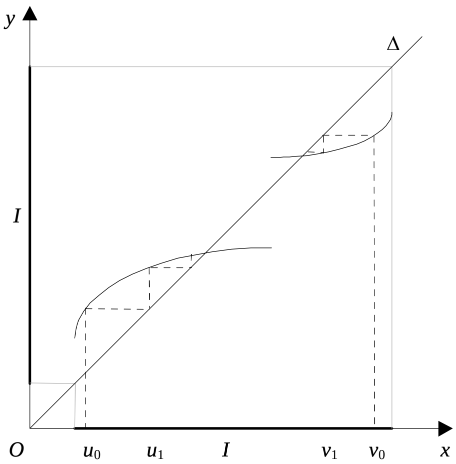
  $$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$
  $$u_{n+2} > u_{n+1}$$

  D'où $\wp(n+1)$.

On a : $\wp(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n)$$



Ci-dessus, f est strictement croissante sur I (mais pas forcément continue).
La suite (u_n) est croissante ($u_0 < f(u_0)$)
La suite (v_n) est décroissante ($v_0 > f(v_0)$)

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

3) $u_1 < u_0$

Même raisonnement qu'en 2) pour obtenir : (u_n) strictement décroissante.

Dans tous les cas, on a bien la monotonie de la suite (u_n).

<u>1.2.2. Théorème</u>

$$\text{Si } \begin{cases} f(I) \subset I \\ x \mapsto f(x) - x \text{ garde un signe constant sur } I \end{cases}, \text{ alors } (u_n) \text{ est monotone.}$$

<u>Plus précisément</u> :

$(\forall x \in I,\ f(x) - x \geqslant 0) \Rightarrow (u_n)$ croissante

$(\forall x \in I,\ f(x) - x \leqslant 0) \Rightarrow (u_n)$ décroissante

<u>Démonstration</u> :

La condition $f(I) \subset I$ assure que la suite (u_n) est bien définie.

Supposons : $\forall x \in I,\ f(x) - x \geqslant 0$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$

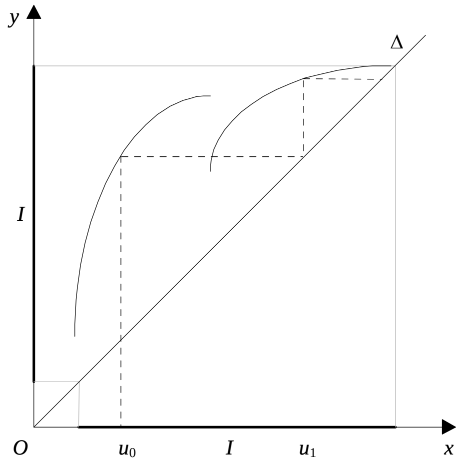
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) - u_n \geqslant 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

Donc (u_n) est croissante.

De même, si l'on suppose : $\forall x \in I,\ f(x) - x \leqslant 0$

On obtient : (u_n) décroissante.



Ci-dessus, $f - Id$ est positif
(mais pas forcément continue).
La suite (u_n) est croissante
Remarque : si I est fermé, il y a nécessairement un point fixe en une de ses bornes.

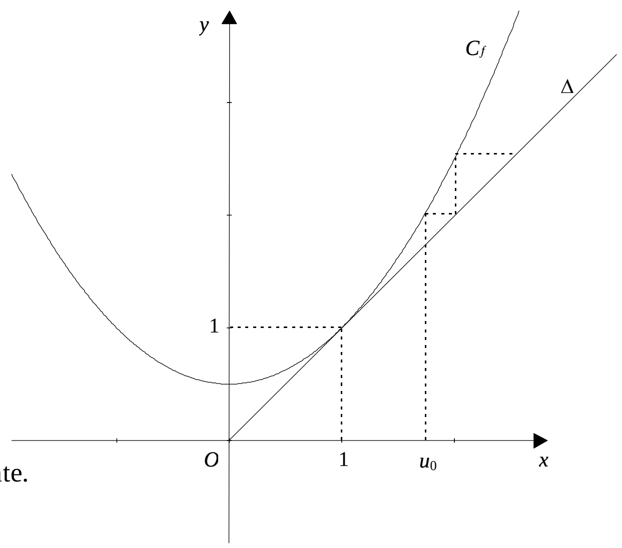
<u>Exemple 1</u> :

Étudier le sens de variation puis la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2} \end{cases}$$

On introduit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$$



Recherche des éventuels points fixes de f :

$$f(x) = x \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = 1$$

On remarque que $\mathbb{R}$ est stable par f.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = (x-1)^2 \geqslant 0$

Donc, d'après 1.2.2., pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) est croissante.

Pour la convergence, on distingue quatre cas :

- $u_0 \in [0, 1[$: la suite (u_n) est croissante et majorée (en effet, on a $f([0, 1[) \subset [0, 1[$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < 1$)

  Donc (u_n) converge vers le point fixe de f, à savoir 1.
- $u_0 = 1$: la suite (u_n) est constante.
- $u_0 > 1$: alors, (u_n) étant croissante, on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$

  La suite (u_n) ne peut donc pas converger vers 1. Donc elle diverge (vers $+\infty$).
- $u_0 < 0$: alors, $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et on applique l'un des trois cas précédents à u_1. On obtient :

$$u_0 \in]-\infty, -1[\ \Rightarrow\ u_1 \in]1, +\infty[\ \Rightarrow\ (u_n) \text{ diverge vers } +\infty$$

$$u_0 = -1 \ \Rightarrow\ u_1 = 1 \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1$$

$$u_0 \in]-1, 0] \ \Rightarrow\ u_1 \in [0, 1] \ \Rightarrow\ (u_n) \text{ converge vers } 1$$

Conclusion : $$(u_n) \text{ converge vers } 1 \ \Leftrightarrow\ u_0 \in [-1, 1]$$

<u>Exemple 2</u> : suites de Héron

On donne $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty[$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)u_n + \dfrac{a}{u_n^{p-1}}\right] \end{cases}$

Précisons, avant toute chose que clairement : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est bien définie.

On introduit : $$f_p :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$
$$x \longmapsto \frac{1}{p}\left[(p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right]$$

Recherche des éventuels points fixes de f_p :

$$f_p(x) = x \ \Leftrightarrow\ (p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} = px \ \Leftrightarrow\ x^p = a$$

Et comme $a > 0$: $$f_p(x) = x \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt[p]{a}$$

Étudions les variations de f_p :

$$f'_p(x) = \frac{p-1}{p} + a\frac{1-p}{p}\frac{1}{x^p} = \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right)$$

$$f'_p(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - \frac{a}{x^p} \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x^p \geqslant a$$

Et comme $a > 0$, par croissance de $t \mapsto \sqrt[p]{t}$ sur $[0, +\infty[$:

$$f'_p(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x \geqslant \sqrt[p]{a}$$

D'où le tableau de variations de f_p :

x	0		$\sqrt[p]{a}$		$+\infty$
Signe de f'_p		$-$	0	$+$	
Variations de f_p		$\searrow$	$\sqrt[p]{a}$	$\nearrow$	

f_p atteint son minimum en son point fixe.

Donc f_p est croissante sur $I = [\sqrt[p]{a}\ , +\infty[$.

On constate, de plus, que I est stable par f_p.

En effet, puisque f est croissante sur I et que $\sqrt[p]{a}$ est un point fixe de f on a :

$$x \in I \Rightarrow x \geqslant \sqrt[p]{a} \Rightarrow f(x) \geqslant f(\sqrt[p]{a}\ ) \Rightarrow f(x) \geqslant \sqrt[p]{a} \Rightarrow f(x) \in I$$

Du théorème 1.2.1., on déduit déjà que (u_n) est monotone.

De plus : $$f_p(x) - x = a - x^p$$

Donc, pour $x \in I$: $$f_p(x) - x \leqslant 0$$

Du théorème 1.2.2., on déduit la décroissance de (u_n) dès lors que $u_0 \in I$.

Bilan : lorsque $u_0 \in [\sqrt[p]{a}\ , +\infty[$, (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt[p]{a}$, donc converge vers $\sqrt[p]{a}$.

Maintenant, si $u_0 \in]0, \sqrt[p]{a}\ [$ alors il suffit de constater que $u_1 \in [\sqrt[p]{a}\ , +\infty[$ et d'après ce qui précède, (u_n) converge encore vers $\sqrt[p]{a}$.

En particulier ($p = a = 2$), la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

converge vers $\sqrt{2}$. (Cet algorithme était déjà connu des Babyloniens)

<u>1.2.3. Théorème</u>

Si $\begin{cases} f(I) \subset I \\ f \text{ décroissante sur } I \end{cases}$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

<u>Plus précisément</u> :

$u_0 \leqslant f \circ f(u_0) \Rightarrow (u_{2n})$ croissante et (u_{2n+1}) décroissante

$u_0 \geqslant f \circ f(u_0) \Rightarrow (u_{2n})$ décroissante et (u_{2n+1}) croissante

<u>Démonstration</u> :

Comme $f(I) \subset I$, la composée $f \circ f$ est bien définie sur I.

D'après le théorème de sens de variation d'une composée, on a :

$$f \circ f \text{ croissante sur } I$$

On applique alors le théorème 1.2.1. à $f \circ f$.

Distinguons deux cas :

1) $u_0 \leqslant u_2$

Alors (récurrence facile), (u_{2p}) croissante.

Mais d'autre part, f étant décroissante, l'inégalité $u_0 \leqslant u_2$ entraîne :

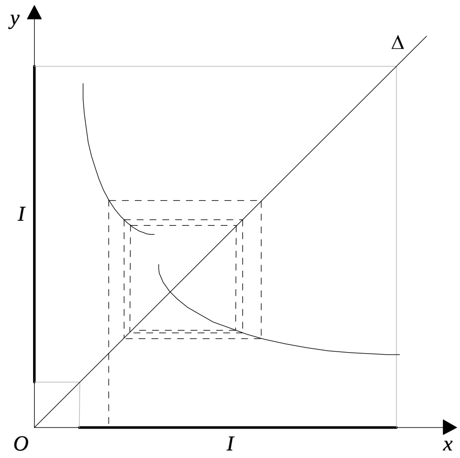
$$f(u_0) \geqslant f(u_2)$$

C'est-à-dire : $u_1 \geqslant u_3$

D'où (récurrence facile), (u_{2p+1}) décroissante.

2) $u_0 \geqslant u_2$

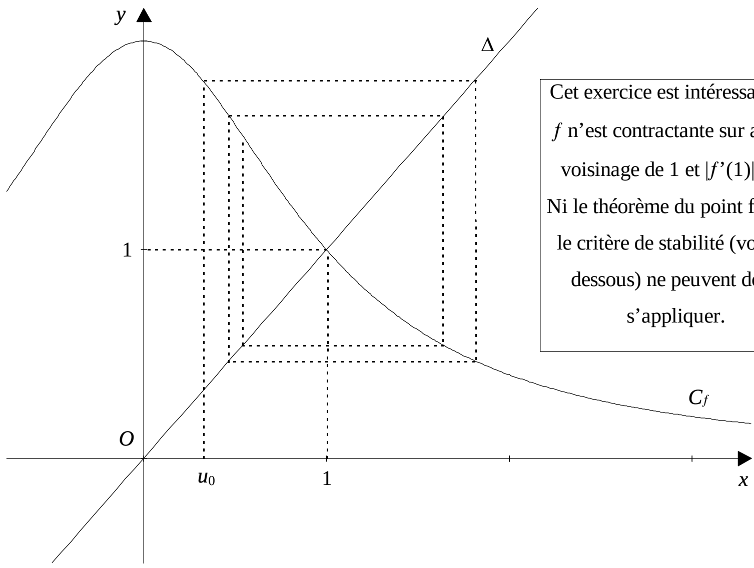
Analogue. On obtient (u_{2p}) décroissante et (u_{2p+1}) croissante.



Dans la pratique, le sens de variation des suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) est obtenu en étudiant le signe de $f \circ f(x) - x$.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$$



Cet exercice est intéressant car f n'est contractante sur aucun voisinage de 1 et $|f'(1)| = 1$. Ni le théorème du point fixe, ni le critère de stabilité (voir ci-dessous) ne peuvent donc s'appliquer.

Evidemment, (u_n) est bornée par 0 et 2.

On introduit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \iff 2 = x + x^3 \iff x = 1$$

Par ailleurs, on montre sans peine que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ stable.

D'après le théorème 1.2.3., les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones de sens contraire.

Posons $g = f \circ f$.

On a : $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{2}{1+\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$$

Étudions le signe de $g(x) - x$:

$$g(x) - x \geqslant 0 \iff \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4} - x \geqslant 0 \iff 2(1+x^2)^2 - [(1+x^2)^2+4]x \geqslant 0$$

$$g(x) - x \geqslant 0 \iff 2 + 4x^2 + 2x^4 - 5x - 2x^3 - x^5 \geqslant 0 \iff (x^2+x+2)(x-1)^3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$$

On distingue alors deux cas :

$u_0 \in [0, 1]$:

Alors $g(u_0) - u_0 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_2 \leqslant u_0$. Toujours d'après le théorème 1.2.3., la suite (u_{2n}) est donc décroissante et (u_{2n+1}) est croissante. Comme ces suites sont bornées, elles convergent et leur limite est un point fixe de g (qui ici est unique, à savoir 1, en adaptant les calculs ci-dessus).

Comme les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite, (u_n) converge (vers 1).

$\boldsymbol{u_0 \in [1, +\infty[}$:

Alors $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$, c'est-à-dire, $u_2 \geqslant u_0$. Cette fois ci, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante. Même conclusion que ci-dessus.

Remarque : il arrive que $g = f \circ f$ admette plusieurs points fixes, auquel cas (u_{2n}) et (u_{2n+1}) peuvent très bien avoir des limites différentes.

1.3. Convergence de (u_n)

1.3. Théorème **Point fixe**

Soit I un intervalle fermé non vide.

Soit $f : I \longrightarrow I$ une application contractante sur I.

Alors :

1) f admet un unique point fixe ℓ dans I.

2) $\forall u_0 \in I$, la suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ.

On peut remplacer l'hypothèse "$f : I \longrightarrow I$ contractante" par "$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contractante et telle que $f(I) \subset I$"

On rappelle que "f contractante sur I" signifie :

$\exists k \in [0, 1[,\ \forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$

Démonstration :

Remarquons au préalable que, u_0 étant dans I et I étant stable par f, la suite (u_n) est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$$

Existence d'un point fixe :

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

- On a évidemment $\wp(0)$.
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \underset{f(I) \subset I}{\overset{f \text{ contractante}}{\leqslant}} k|u_{n+1} - u_n| \overset{\wp(n)}{\leqslant} k^{n+1}|u_1 - u_0|$$

  D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

Déduisons-en que (u_n) **est de Cauchy** :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p \geqslant 0$.

Notons $r = q - p$.

On a :

$$|u_q - u_p| = |u_{p+r} - u_p| = \left| \sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1} - u_i \right| \leqslant \sum_{i=p}^{p+r-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=p}^{p+r-1} k^i\, |u_1 - u_0|$$

Or : $$\sum_{i=p}^{p+r-1} k^i \, |u_1 - u_0| = k^p \, |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{r-1} k^i$$

Et comme $k \in [0, 1[$, la série géométrique de terme général k^i converge et est majorée par $\dfrac{1}{1-k}$.

D'où : $$|u_q - u_p| \leqslant \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Et enfin, toujours parce que $k \in [0, 1[$: $$\frac{k^p}{1-k} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$$

En conséquence :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \left(p \geqslant N \Rightarrow \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |u_q - u_p| \leqslant \varepsilon\right)$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est de Cauchy.

Et comme $\mathbb{R}$ est complet, (u_n) converge.

Notons ℓ sa limite. Comme I est fermé, on a $\ell \in I$.

Or, f est continue en ℓ (puisque contractante sur I) donc, d'après le théorème 1.1. :

$$\ell = f(\ell)$$

On a donc prouvé que f admet un point fixe ℓ dans I et que (u_n) converge vers ℓ.

<u>Unicité du point fixe</u> :

Supposons : $$\exists \ell, \ell' \in I, f(\ell) = \ell \text{ et } f(\ell') = \ell'$$

Comme f est contractante sur I : $$|f(\ell) - f(\ell')| \leqslant k|\ell - \ell'|$$

$$|\ell - \ell'| \leqslant k|\ell - \ell'|$$

$$(1 - k)|\ell - \ell'| \leqslant 0$$

Or, $k \in [0, 1[$, donc : $$|\ell - \ell'| \leqslant 0$$

$$\ell = \ell'$$

<u>Remarques</u> :

- L'hypothèse "I fermé" n'est là que pour assurer $\ell \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $\ell \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé ℓ en résolvant l'équation $f(\ell) = \ell$), cette hypothèse devient inutile.
- Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur I " par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I ". Voici un contre-exemple :

  $I = [1, +\infty[$ $$f : I \to I, \quad x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

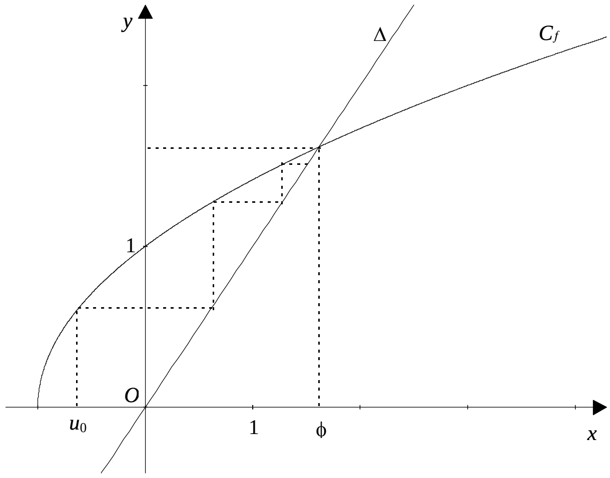
  Soient x et y dans I avec $x < y$.

  Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

  $$|f(y) - f(x)| \leqslant f(y) - f(x) \leqslant y - x + \frac{x-y}{xy} \leqslant y - x \leqslant |y - x|$$

  Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)



Exemple :

Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On introduit l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x}$$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff x \geqslant 0 \text{ et } x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus : $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre : $$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$$

Donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ converge donc vers ϕ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, 0]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède, (u_n) converge encore vers ϕ.

1.4. Stabilité d'un point fixe

1.4.1. Définition

Soit I un intervalle fermé non vide.

Soit $f : I \longrightarrow I$ une application admettant un point fixe s.

On dit que s est un point fixe attractif lorsque il existe un voisinage V de s tel que :

$$\forall u_0 \in V, \text{ la suite } u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \begin{cases} u_0 \in V \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ converge vers } s.$$

Dans le cas contraire, on dit que s est un point fixe répulsif.

Évidemment, si on est dans les conditions du théorème du point fixe (f contractante), le point fixe de f est attractif.

1.4.2. Théorème *Critère de stabilité d'un point fixe*

Soit I un intervalle fermé non vide.

Soit $f : I \longrightarrow I$ une application de classe C^1 admettant un point fixe s.

Si $|f'(s)| < 1$, alors s est attractif.

Si $|f'(s)| > 1$, alors s est répulsif.

Dans le cas où $|f'(s)| = 1$, le théorème n'affirme rien. Les deux situations peuvent se produire (attractif ou répulsif). Il faut voir au cas par cas. Voir les deux exemples ci-après.

Démonstration :

- Supposons $|f'(s)| < 1$.

  Alors il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(s)| < k < 1$.

  Comme $|f'|$ est continue en s, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, (|x - s| \leqslant \eta \Rightarrow |\,|f'(x)| - |f'(s)|\,| < \varepsilon)$$

  En particulier pour $\varepsilon = k - |f'(s)| \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, (x \in [s - \eta, s + \eta] \Rightarrow |f'(x)| < k)$$

  Posons $V = [s - \eta, s + \eta]$. Ainsi :

$$\forall x \in V, |f'(x)| < k$$

  D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur V :

$$\forall x \in V, |f(x) - f(s)| \leqslant k|x - s|$$

  Et comme s est un point fixe de f :

$$\forall x \in V, |f(x) - s| \leqslant k|x - s| < \eta$$

  Donc, $f(x) \in V$, ce qui prouve que V est stable par f.

  Soit $u_0 \in V$ et $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ la définie par $\begin{cases} u_0 \in V \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

  Comme V est stable par f, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in V$

  Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\wp(n) : |u_n - s| \leqslant k^n\,|u_0 - s|$$

On a de plus :

$$u_n - s = O(k^n)$$

ce qui nous renseigne sur la rapidité de convergence.

On a évidemment $\wp(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$.

On a : $|u_{n+1} - s| = |f(u_n) - s|$

Et comme $u_n \in V$: $|f(u_n) - s| \leqslant k|u_n - s|$

Et d'après $\wp(n)$: $k|u_n - s| \leqslant k^{n+1}|u_0 - s|$

D'où : $|u_{n+1} - s| \leqslant k^{n+1}|u_0 - s|$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |u_n - s| \leqslant k^n\,|u_0 - s|$

Et comme $k \in [0, 1[$: (u_n) converge vers s

- Supposons $|f'(s)| > 1$.

Alors il existe $k \in]1, +\infty[$ tel que $|f'(s)| > k > 1$.

Comme $|f'|$ est continue en s, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ (|x - s| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ \big|\,|f'(x)| - |f'(s)|\,\big| \leqslant \varepsilon)$$

En particulier pour $\varepsilon = |f'(s)| - k$:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ (x \in [s - \eta, s + \eta] \ \Rightarrow\ k \leqslant |f'(x)|)$$

Posons $V = [s - \eta, s + \eta]$. Ainsi :

$$\forall t \in V,\ |f'(t)| \geqslant k > 1$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur V :

$$\forall x \in V,\ \exists c \in V \text{ tel que : } f(x) - f(s) = f'(c)(x - s)$$

D'où : $|f(x) - f(s)| = |f'(c)|\,|x - s|$

Et comme s est un point fixe de f : $\forall x \in V,\ |f(x) - s| \geqslant k|x - s| \qquad (\ast)$

Montrons maintenant que s est un point fixe répulsif.

Autrement dit, nous devons montrer, pour tout voisinage V' de s :

$\exists u_0 \in V'$, la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in V' \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ne converge pas vers s.

Ceci dit, la suite en question peut très bien converger vers un autre point fixe.

Soit V' un voisinage quelconque de s.

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in V' \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ convergeant vers s

(Il existe au moins une telle suite, il suffit de choisir $u_0 = s$ ainsi u est constante égale à s).

Comme u converge vers s, on a (avec $\varepsilon = \eta$) :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \ \Rightarrow\ |u_n - s| \leqslant \eta)$$

Autrement dit : $n \geqslant N \ \Rightarrow\ u_n \in V$

Mais alors, dans ce cas, d'après $(\ast)$ et avec une récurrence facile, on obtient :

$$|u_n - s| \geqslant k^{n-N}|u_N - s|$$

Mais comme $k \in]1, +\infty[$, la suite (k^{n-N}) tend vers $+\infty$. Et comme on a supposé que (u_n) convergeait vers s, l'inégalité ci-dessus n'est possible que si $u_N = s$, c'est-à-dire que si (u_n) est stationnaire égale à s à partir d'un certain rang.

On a prouvé que :

$$(u_n) \text{ converge vers } s \;\Rightarrow\; (u_n) \text{ stationnaire égale à } s \text{ à partir d'un certain rang}$$

Par contraposition :

$$(u_n) \text{ non stationnaire égale à } s \;\Rightarrow\; (u_n) \text{ ne converge pas vers } s$$

Reste à démontrer que pour tout voisinage V' de s, on peut trouver u_0 dans V' tel que (u_n) soit non stationnaire.

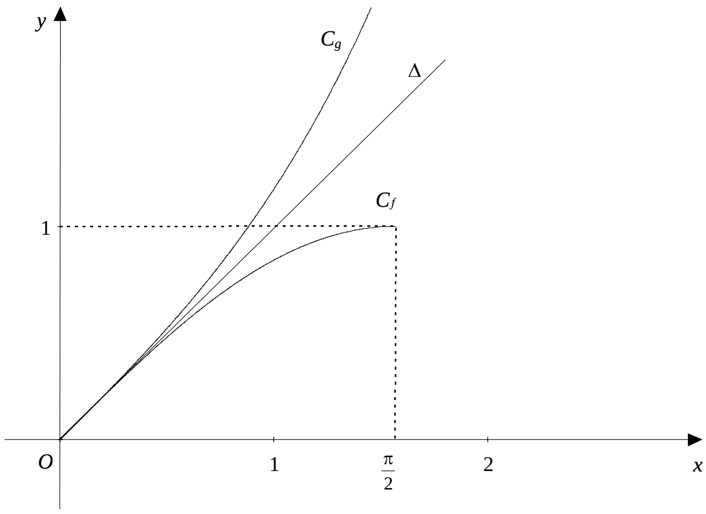
Or, l'ensemble $E = \{u_0 \in V' \mid \exists N \in \mathbb{N},\, u_N = s\}$ est dénombrable tandis que V' a la puissance du continu.

Donc $V' \setminus E$ est non vide, ce qui prouve ce qu'on souhaitait.

- Cas $|f'(s)| = 1$

Dans ce cas, s peut être attractif ou répulsif. Donnons deux exemples :

$$f : \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad g : [0, +\infty[\;\to [0, +\infty[$$
$$x \mapsto \sin x \qquad\qquad\qquad x \mapsto \operatorname{sh} x$$



f et g ont un unique point fixe $s = 0$ et on a : $f'(0) = g'(0) = 1$.

La suite u définie par $\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$ est bien définie puisque l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f.

Comme : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$

On en déduit (théorème 2.2.) que la suite (u_n) est décroissante.

En outre, (u_n) est minorée (par 0) donc converge vers $s = 0$.

Le point fixe s est donc **attractif**.

La suite v définie par $\begin{cases} v_0 \in]0, +\infty] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \operatorname{sh}(v_n) \end{cases}$ est bien définie puisque l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f.

Comme : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\operatorname{sh} x > x$

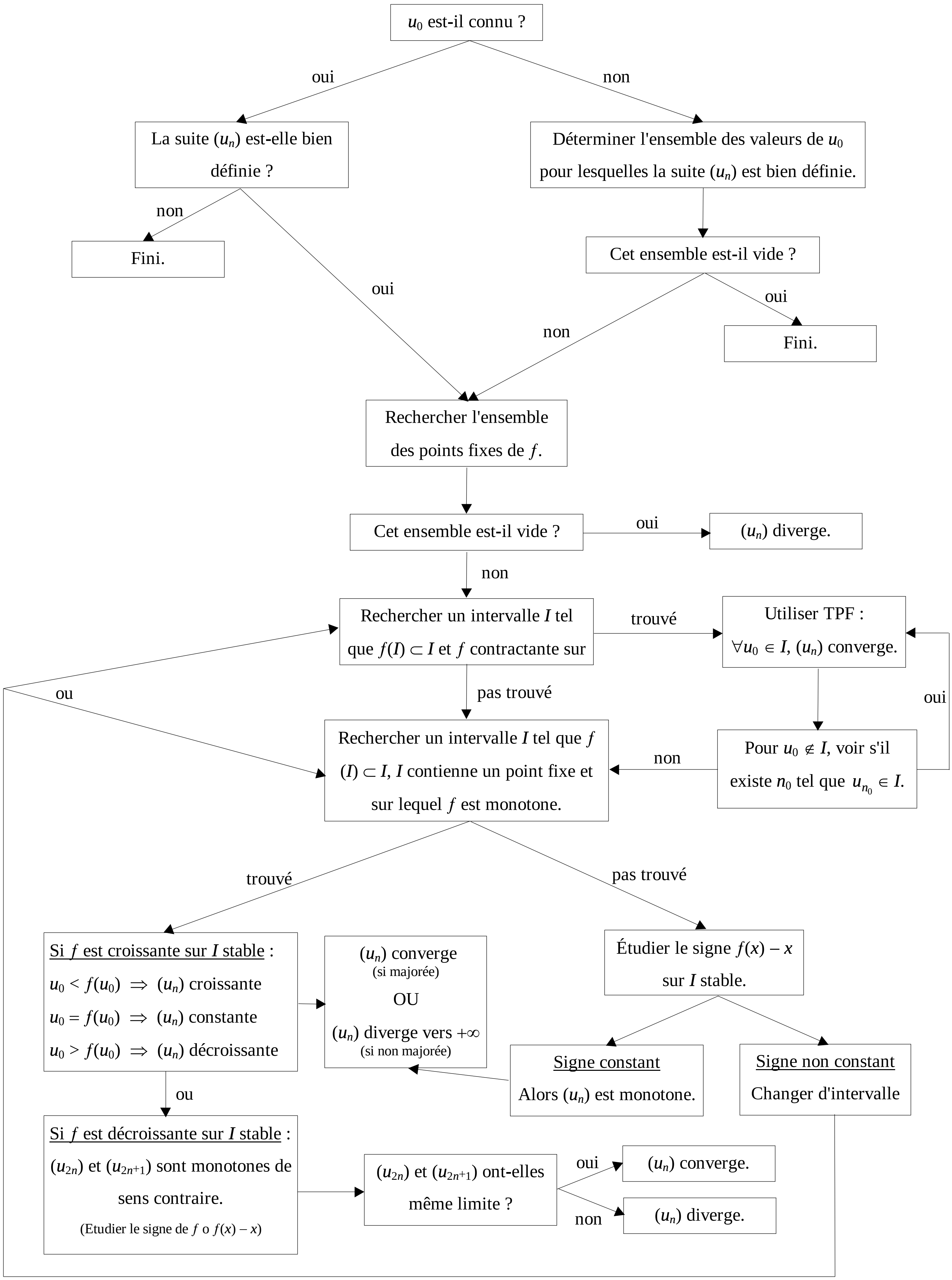
On en déduit (théorème 2.2.) que la suite (v_n) est croissante.

Or, le seul point fixe de g est 0 est (v_n) est à termes positifs. Donc (v_n) diverge.

Le point fixe s est donc **répulsif**.

1.5. Résumé : plan d'étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On donne : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



u_0 est-il connu ?
oui
non
La suite (u_n) est-elle bien définie ?
Déterminer l'ensemble des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est bien définie.
non
Fini.
Cet ensemble est-il vide ?
oui
oui
non
Fini.
Rechercher l'ensemble des points fixes de f.
Cet ensemble est-il vide ?
oui
(u_n) diverge.
non
Rechercher un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et f contractante sur
trouvé
Utiliser TPF : $\forall u_0 \in I$, (u_n) converge.
ou
pas trouvé
oui
Rechercher un intervalle I tel que $f(I) \subset I$, I contienne un point fixe et sur lequel f est monotone.
non
Pour $u_0 \notin I$, voir s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} \in I$.
trouvé
pas trouvé
Si f est croissante sur I stable :
$u_0 < f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ croissante
$u_0 = f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ constante
$u_0 > f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ décroissante
(u_n) converge (si majorée) OU (u_n) diverge vers $+\infty$ (si non majorée)
Étudier le signe $f(x) - x$ sur I stable.
Signe constant
Alors (u_n) est monotone.
Signe non constant
Changer d'intervalle
ou
Si f est décroissante sur I stable :
(u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.
(Etudier le signe de $f \circ f(x) - x$)
(u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont-elles même limite ?
oui
(u_n) converge.
non
(u_n) diverge.

2. Autres types de récurrences

2.1. Suites récurrentes linéaires d'ordre k à coefficients constants

Il s'agit des suites définies par :

$k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $$\begin{cases} u_0, u_1, \ldots, u_{k-1} \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i} \end{cases}$$

Par exemple pour $k = 2$, cela donne :

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_{n+2}$$

Technique pour expliciter u_n :

On pose : $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}) \ \text{ (ou } M_k(\mathbb{C}))$$

Ainsi : $$\forall n \in \mathbb{N},\ AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

D'où (récurrence) : $$X_n = A^n X_0 \quad \text{où} \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, il suffit de calculer A^n pour connaître X_n et donc u_n.

(Pour calculer A^n, on utilise les méthodes classiques : diagonalisation ou à défaut trigonalisation, division euclidienne, décomposition de Dunford, etc …)

Exemple avec $k = 3$:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+2} - 16u_{n+1} + 12u_n \end{cases}$$

Posons : $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & 7 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n \quad \text{et donc } X_n = A^n X_0$$

Calcul de A^n par la méthode de la division euclidienne :

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 12 & -16 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 16) + 12 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2 ; 3\}$$

On effectue, pour $n \geqslant 3$, la division euclidienne de X^n par χ_A :

$$\exists ! \, (Q_n, R_n) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ X^n = Q_n(X)\chi_A(X) + R_n(X) \ \text{ avec } \deg(R_n) < 3 \qquad (\ast)$$

D'après le théorème d'Hamilton-Cayley : $\chi_A(A) = 0$

D'où : $A^n = R_n(A)$

Pour calculer A^n, il suffit de connaître le polynôme R_n.

Posons : $R_n(X) = a_nX^2 + b_nX + c_n$

En remplaçant X par les racines de χ_A dans (✳) :

$$2^n = 4a_n + 2b_n + c_n$$

$$3^n = 9a_n + 3b_n + c_n$$

On obtient une troisième relation en dérivant l'égalité (✳) :

$$nX^{n-1} = Q_n'(X)\chi_A(X) + Q_n(X)\chi_A'(X) + 2a_nX + b_n$$

Et comme 2 est racine double de χ_A, on a $\chi_A'(2) = 0$ d'où :

$$n2^{n-1} = 4a_n + b_n$$

On résout ensuite le système : (S_n) : $\begin{cases} 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n & L_1 \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n & L_2 \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} & L_3 \end{cases}$

En effectuant l'opération $L_1 - L_2 - L_3$, on obtient :

$$a_n = 3^n - 2^n - n2^{n-1} = 3^n - (2 + n)2^{n-1}$$

Avec L_3 : $b_n = -4 \times 3^n + (8 + 5n)2^{n-1}$

Avec L_2 : $c_n = 2 \times 2^{n-1} - 4 \times 3^n + (8 + 4n)\, 2^{n-1} + 8 \times 3^n - (16 + 10n)2^{n-1} = 4 \times 3^n - (6 + 6n)2^{n-1}$

D'où : $R_n(X) = [3^n - (2 + n)2^{n-1}]X^2 + [-4 \times 3^n + (8 + 5n)2^{n-1}]X + 4 \times 3^n - (6 + 6n)2^{n-1}$

On a donc : $A^n = [3^n - (2 + n)2^{n-1}]A^2 + [-4 \times 3^n + (8 + 5n)2^{n-1}]A + [4 \times 3^n - (6 + 6n)2^{n-1}]I_3$

D'où : $X^n = A^nX_0 = [3^n - (2 + n)2^{n-1}]A^2X_0 + [-4 \times 3^n + (8 + 5n)2^{n-1}]AX_0 + [4 \times 3^n - (6 + 6n)2^{n-1}]X_0$

Or : $AX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A^2X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

D'où : $u_n = [3^n - (2 + n)2^{n-1}] + [-4 \times 3^n + (8 + 5n)2^{n-1}] + [4 \times 3^n - (6 + 6n)2^{n-1}]$

$$u_n = 3^n - n2^n$$

<u>Autre approche dans le cas $k = 2$</u>

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

On considère l'ensemble $E_{a,b} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définies par $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

($E_{a,b}$ est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants **fixés** dans $\mathbb{C}$)

Il est clair que : **$E_{a,b}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.**

De plus : **$\dim_{\mathbb{C}}(E_{a,b}) = 2$**

En effet, il suffit de considérer l'application $\varphi : E_{a,b} \to \mathbb{C}^2$

$$u \mapsto (u_0\ ;\ u_1)$$

φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. (En effet, φ est clairement linéaire et clairement bijective puisque toute suite u de $E_{a,b}$ est **caractérisée** par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1)

Or, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$ donc $\dim_{\mathbb{C}}(E_{a,b}) = 2$ également.

On peut donc construire une base (u, v) de $E_{a,b}$ en considérant $u = \varphi^{-1}((1\ ;\ 0))$ et $v = \varphi^{-1}((0\ ;\ 1))$. (Image réciproque par φ de la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$)

Recherchons les **suites géométriques éléments de $E_{a,b}$.**

Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \alpha^n$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$).

$$v \in E_{a,b} \Leftrightarrow \alpha^2 - a\,\alpha - b = 0$$

Notons λ_1 et λ_2 les deux racines complexes de l'équation caractéristique $r^2 - a\,r - b = 0$. (Elles existent car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos)

Ainsi : $$v \in E_{a,b} \Leftrightarrow v_n = (\lambda_1)^n \text{ ou } v_n = (\lambda_2)^n$$

On en déduit la forme générale (et explicite) des éléments de $E_{a,b}$:

- Si λ_1 et λ_2 sont distincts, on montre que les suites (λ_1^n) et (λ_2^n) sont indépendantes d'où :

$$u_n = A(\lambda_1^n) + B(\lambda_2^n) \quad \text{où } A, B \in \mathbb{C}$$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, on montre que les suites (λ^n) et $(n\lambda^n)$ sont indépendantes d'où :

$$u_n = (An + B)(\lambda^n) \quad \text{où } A, B \in \mathbb{C}$$

Sous-cas spécial : $\lambda = 1$. La suite (u_n) est alors arithmétique.

Cas particulier : $a, b \in \mathbb{R}$. Mêmes résultats que précédemment (en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$) sauf dans le cas où λ_1 et λ_2 sont des racines complexes conjuguées distinctes : on pose dans ce cas :

$$f = \frac{\lambda^n + \overline{\lambda}^n}{2} = \mathrm{Re}(\lambda^n) \quad \text{et} \quad g = \frac{\lambda^n - \overline{\lambda}^n}{2\mathbf{i}} = \mathrm{Im}(\lambda^n)$$

On vérifie que f et g sont des suites (réelles) indépendantes de $E_{a,b}$.

En notant $\lambda = \rho\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, il vient donc :

$$u_n = A\,\rho^n \cos(n\theta) + B\,\rho^n \sin(n\theta) \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

2.2. Suites simultanément récurrentes

2.2.1. Cas linéaires

Dans ce cas, on procède aussi matriciellement. Donnons un exemple :

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{C} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, la récurrence s'écrit : $X_{n+1} = AX_n$

D'où : $X_n = A^n X_0$

Là encore, on s'est ramené au calcul de puissances d'une matrice.

2.2.2. Cas non linéaires

Etudions un exemple :

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$a_0 = a$; $b_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Alors (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Solution :

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{4} - a_n b_n$$

$$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$$

Enfin, comme $a_0 > b_0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant b_n$

Bien que ce résultat ne soit pas une hypothèse nécessaire du théorème des suites adjacentes, on l'utilise pour prouver les suivants :

- En effet, d'une part : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n + a_n}{2} \leqslant a_n$

  Donc la suite (a_n) est décroissante.

- D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\,) \geqslant 0$

  (par croissance de $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$)

  Donc la suite (b_n) est croissante.

- On considère maintenant la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|a - b|$$

  * On a bien sûr $\wp(0)$.
  * Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

    Supposons $\wp(n)$: $|a_n - b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|a - b|$

Utilisons la propriété : $0 \leqslant X \leqslant Y \Rightarrow 0 \leqslant (Y-X)^2 \leqslant Y^2 - X^2$

(Pour le démontrer, il suffit de multiplier l'inégalité $0 \leqslant Y - X \leqslant Y + X$ par $Y - X \geqslant 0$)

Comme $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$, on a :

$$|a_{n+1} - b_{n+1}|^2 \leqslant |a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2| \overset{(1)}{\leqslant} \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{|a-b|^2}{2^{2n+2}}$$

Et par croissance de $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$: $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|a-b|$

D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|a-b|$$

D'où, par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

On a donc prouvé que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. On ne connaît pas d'expression de cette limite mais elle est liée aux intégrales elliptiques de 2ème espèce...)

2.3. Suites récurrentes définies implicitement

Là encore, donnons un exemple :

Soit n un entier naturel impair.

a) Démontrer que l'équation $(E_n) : \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = 0$

admet unique solution réelle α_n.

b) Démontrer que la suite (α_n) diverge.

Solution :

Posons : $$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

(Polynôme de Taylor de l'exponentielle)

On a alors : $$P_n'(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{iX^{i-1}}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} = P_{n-1}(X)$$

a) Considérons la propriété $\wp$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(k) : \forall x \in \mathbb{R},\ P_{2k}(x) > 0 \ \text{ et } \ \exists! \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ tel que } P_{2k+1}(\alpha_k) = 0 \text{ avec } \begin{cases} P_{2k+1}(x) < 0 \text{ si } x < \alpha_k \\ P_{2k+1}(x) > 0 \text{ si } x > \alpha_k \end{cases}$$

On a : $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0$$

Donc P_3 est strictement croissante (puisque $P_3' = P_2$). En outre $\lim\limits_{x \to -\infty} P_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_3(x) = +\infty$.

Comme P_3 est continue, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc l'existence d'un unique réel α_1 tel que $P_3(\alpha_1) = 0$.

La croissance de P_3 entraîne, de plus : $P_3 < 0$ sur $]-\infty, \alpha_1[$ et $P_3 > 0$ sur $]\alpha_1, +\infty[$. D'où $\wp(1)$.

Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\wp(k) \Rightarrow \wp(k+1)$:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(k)$.

Comme $P'_{2k+2} = P_{2k+1}$, on a :

x	$-\infty$		α_k		$+\infty$
Signe de P'_{2k+2}		$-$	0	$+$	
Variations de P_{2k+2}		$\searrow$		$\nearrow$	

Or : $$P_{2k+2}(\alpha_k) = P_{2k+1}(\alpha_k) + \frac{\alpha_k^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{\alpha_k^{2k+2}}{(2k+2)!} > 0$$

Donc : $$P_{2k+2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$P'_{2k+3} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$P_{2k+3} \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{2k+3} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{2k+3} = +\infty$ et P_{2k+3} continue donc :

$$\exists! \alpha_{k+1} \in \mathbb{R} \text{ tel que } P_{2k+3}(\alpha_{k+1}) = 0 \text{ avec } \begin{cases} P_{2k+3}(x) < 0 \text{ si } x < \alpha_{k+1} \\ P_{2k+3}(x) > 0 \text{ si } x > \alpha_{k+1} \end{cases}$$

D'où $\wp(k+1)$.

L'équation (E_n) : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = 0$ admet donc bien, pour n impair, une unique solution réelle α_n.

b) Soit $M \in \mathbb{R}$. On a : $$\lim_{k \to +\infty} P_{2k+1}(M) = \mathbf{e}^M > 0$$

Donc : $$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k \geqslant k_0 \Rightarrow P_{2k+1}(M) > 0)$$

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow P_{2k+1}(M) > P_{2k+1}(\alpha_k)$$

Donc, par croissance de P_{2k+1} : $$k \geqslant k_0 \Rightarrow M > \alpha_k$$

Ce qui prouve bien que la suite (α_n) diverge vers $-\infty$.

3. Annexe : étude générale des suites homographiques

Contexte et données :

> Si $c = 0$, alors l'application f est affine.
> Si $\delta = 0$, alors l'application f est constante.
> Ces deux cas particuliers s'étudient différemment.

- $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $\delta = ad - bc$ avec $c \neq 0$ et $\delta \neq 0$.
- $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$
  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$
- $u = (u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ lorsqu'elle existe (ce n'est justement pas toujours le cas !)
- (ξ) l'équation : $\lambda = f(\lambda)$
- $E = \{u_0 \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \mid cu_n + d = 0\}$

Objectifs :

- Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle bien définie ?
- Exprimer u_n en fonction de n.
- Étudier la convergence de la suite (u_n).

Pour faciliter le travail, commençons par ce qui suit :

Quelques propriétés utiles et usuelles des suites homographiques

1. f est une bijection :

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Montrons : $\exists ! x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ tel que $y = f(x)$

La condition $y = f(x)$ s'écrit : $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$ycx + yd = ax + b$$

$$x(cy - a) = b - dy$$

Or, $cy - a \neq 0$, d'où : $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$

Pour chaque y de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, il existe un unique antécédent, ce qui prouve la bijectivité de f.

Le calcul ci-dessus permet également d'expliciter la bijection réciproque :

$$g = f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$
$$x \mapsto \frac{-dx+b}{cx-a}$$

2. Étude de l'équation $\lambda = f(\lambda)$:

Cette équation de second degré s'écrit encore :

$$c\lambda^2 + (d - a)\lambda - b = 0$$

Son discriminant Δ est :

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = (d + a)^2 - 4ad + 4bc = (d + a)^2 - 4\delta$$

Remarquons au passage que, comme $\delta \neq 0$, on a : $(a + d)^2 \neq \Delta$.

Si $\Delta > 0$ (c'est-à-dire $(d + a)^2 > 4\delta$) : alors l'équation (ξ) admet deux racines réelles distinctes :

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a-d-\sqrt{\Delta}}{2c}$$

Si $\Delta = 0$ (c'est-à-dire $(d + a)^2 = 4\delta$) : alors l'équation (ξ) admet une unique racine réelle :

$$\gamma = \frac{a-d}{2c}$$

Remarquons que dans ce cas, on a nécessairement : $a + d \neq 0$ puisque $\delta \neq 0$.

Si $\Delta < 0$ (c'est-à-dire $(d + a)^2 < 4\delta$) : alors l'équation (ξ) admet deux racines complexes conjuguées :

$$\alpha = \frac{a-d+\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2c} \quad \text{et} \quad \beta = \overline{\alpha}$$

3. Propriétés des racines de (ξ) :

Soit λ une racine de (ξ). On a donc : $f(\lambda) = \lambda$

Comme f est bijective : $f^{-1} \circ f(\lambda) = f^{-1}(\lambda)$

$$\lambda = f^{-1}(\lambda)$$

On a donc : $\lambda = \dfrac{a\lambda+b}{c\lambda+d} = \dfrac{-d\lambda+b}{c\lambda-a}$

4. Lien entre les racines de (ξ) et la suite *u* :

Soit λ une racine de (ξ). Si $u_0 \neq \lambda$ alors, $u_n \neq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve : par récurrence. Supposons $u_0 \neq \lambda$. Considérons $\wp(n)$: " $u_n \neq \lambda$ " pour $n \in \mathbb{N}$.

- On a $\wp(0)$ par hypothèse.
- Supposons $\wp(n)$: $u_n \neq \lambda$

  Comme f est injective : $f(u_n) \neq f(\lambda)$

  C'est-à-dire : $u_{n+1} \neq \lambda$

  D'où $\wp(n + 1)$.

D'où le résultat annoncé.

5. Accroissement moyen de *f* :

Pour tous x et y de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ distincts :

$$f(x) - f(y) = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{acxy+adx+bcy+bd-acxy-ady-bcx-bd}{(cx+d)(cy+d)} = \frac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}$$

D'où : $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\delta}{(cx+d)(cy+d)}$$

Ces préliminaires étant faits, répondons maintenant à nos trois objectifs. En commençant par le deuxième, à savoir : **expliciter la suite *u*.**

CAS 1 : l'équation (ξ) admet deux racines distinctes α et β (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- Si $u_0 = \alpha$ (resp. β) alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$ (resp. β) et c'est fini.

- Si $u_0 \in E$ alors la suite (u_n) ne sera plus définie au delà d'un certain rang, donc il n'y a rien à expliciter.
- Supposons désormais $u_0 \notin E \cup \{\alpha, \beta\}$.

Comme (voir 4) $u_n \neq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut poser : $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

Remarquons également, que ayant supposé $\alpha \neq \beta$, on a : $v_n \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que la suite $v = (v_n)$ est géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{f(u_n) - f(\beta)} \overset{(5)}{=} \frac{\delta(u_n - \alpha)}{(cu_n + d)(c\alpha + d)} \times \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{\delta(u_n - \beta)} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} v_n$$

Donc la suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d} \overset{(2)}{=} \begin{cases} \dfrac{a + d - \sqrt{\Delta}}{a + d + \sqrt{\Delta}} \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont réelles} \\ \dfrac{a + d - \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{a + d + \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}} \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont complexes} \end{cases}$

(Ces relations ont bien un sens car $(a + d)^2 - \Delta \neq 0$)

Remarquons que l'on a $q \neq 0$. (Sinon on aurait $v_1 = 0$ et donc $u_1 = \alpha$ ce qui est impossible car $u_0 \neq \alpha$)

Remarquons également que si q est complexe alors $|q| = 1$.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$v_n = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} q^n$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$u_n(v_n - 1) = \beta v_n - \alpha$$

D'où : $$u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$$

On a donc explicité la suite u dans le cas où l'équation (ξ) admet deux racines distinctes.

Avant d'étudier le CAS 2, répondons a nos deux autres objectifs :

La suite u sera non définie dès qu'il existe un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que : $u_k = -\dfrac{d}{c}$.

Pour de tels $k \in \mathbb{N}$, on a : $$v_k = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} q^k = \frac{u_k - \alpha}{u_k - \beta} = \frac{d + c\alpha}{d + c\beta} = q^{-1}$$

D'où : $$(u_0 - \alpha)q^{k+1} = (u_0 - \beta)$$
$$u_0(q^{k+1} - 1) = \alpha q^{k+1} - \beta$$

Et pour ces entiers k tels que $q^{k+1} \neq 1$: $$u_0 = \frac{\alpha q^{k+1} - \beta}{q^{k+1} - 1}$$

On conclut : $$E = \left\{ \frac{\alpha q^{k+1} - \beta}{q^{k+1} - 1} \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ et } q^{k+1} \neq 1 \right\}$$

En général, cet ensemble E est infini mais il y peut y avoir des exceptions lorsque α et β sont complexes.

Par exemple : $$\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 - u_n} \end{cases}$$

Déterminons E. On a ici, en appliquant ce qui précède :

$$\alpha = \mathbf{i} \text{ et } \beta = -\mathbf{i}$$

$$q = \frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} = \mathbf{i}$$

$$E = \left\{ \frac{\mathbf{i}^{k+2} + \mathbf{i}}{\mathbf{i}^{k+1} - 1}, k \in \mathbb{N} \text{ et } k \neq 3[4] \right\}$$

Or, $$\frac{\mathbf{i}^{k+2} + \mathbf{i}}{\mathbf{i}^{k+1} - 1} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0[4] \\ 0 \text{ si } k = 1[4] \\ -1 \text{ si } k = 2[4] \end{cases}$$

Donc $$E = \{-1 ; 0 ; 1\}$$

La suite u est donc bien définie pour tout terme initial u_0 différent de -1, 0 ou 1.

Précisons la convergence de la suite u (notons qu'en cas de convergence, ce ne peut être que vers les points fixes α et β de f)

Cas réel ($\Delta > 0$) :

Si $|q| < 1$ alors v converge vers 0 et donc u converge vers α.

Si $|q| > 1$ alors $|v|$ diverge vers $+\infty$ et donc u converge vers β.

Le cas $q = 1$ est exclu car d'après 2., $(a + d)^2 \neq \Delta$.

Cas complexe ($\Delta < 0$) :

Dans ce cas, la suite u diverge. En effet, elle n'a aucune chance de converger puisque f n'a pas de point fixe réel...

CAS 2 : l'équation (ξ) admet une unique racine $\gamma \in \mathbb{R}$

- Si $u_0 = \gamma$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \gamma$ et c'est fini.
- Si $u_0 \in E$ alors la suite (u_n) ne sera plus définie au delà d'un certain rang, donc il n'y a rien à expliciter.
- Supposons désormais $u_0 \notin E \cup \{\gamma\}$.

Comme (voir 4) $u_n \neq \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut poser : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \gamma}$

Remarquons également que : $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que la suite $v = (v_n)$ est arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - \gamma} = \frac{cu_n + d}{au_n + b - \gamma(cu_n + d)} = \frac{cu_n + d}{au_n + b - \gamma cu_n - \gamma d} = \frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)\left(u_n + \dfrac{b - \gamma d}{a - \gamma c}\right)} \overset{(3)}{=} \frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)(u_n - \gamma)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}\left(\frac{cu_n + d}{a - \gamma c} - 1\right) = \frac{1}{u_n - \gamma}\left(\frac{cu_n + d - a + \gamma c}{a - \gamma c}\right)$$

Or, $d - a + \gamma c = d - a + \dfrac{a - d}{2} = \dfrac{d - a}{2}$ et $a - \gamma c = a - \dfrac{a - d}{2} = \dfrac{a + d}{2}$ ($\neq 0$ car $\gamma \neq \dfrac{c}{a}$)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}\left(\frac{cu_n + \dfrac{d - a}{2}}{\dfrac{a + d}{2}}\right) = \frac{1}{u_n - \gamma}\left(\frac{2cu_n + d - a}{a + d}\right) = \frac{1}{u_n - \gamma} \times 2c \times \left(\frac{u_n - \gamma}{a + d}\right) = \frac{2c}{a + d}$$

Donc la suite v est arithmétique de raison $r = \dfrac{2c}{a + d}$

(Cette relation a bien un sens car $a + d \neq 0$ quand $\Delta = 0$)

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$v_n = \frac{1}{u_0 - \gamma} + nr$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$: $$u_n v_n - \gamma v_n = 1$$

D'où : $$u_n = \frac{1 + \gamma v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + \gamma$$

On a donc explicité la suite u dans le cas où l'équation (ξ) admet une unique racine réelle.

La suite u sera non définie dès qu'il existe un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que : $u_k = -\frac{d}{c}$.

Pour de tels $k \in \mathbb{N}$, on a : $$v_k = \frac{1}{u_0 - \gamma} + nk = \frac{1}{u_k - \gamma} = \frac{-c}{d + c\gamma} = -r$$

D'où : $$\frac{1}{u_0 - \gamma} = -r - nk$$

$$u_0 - \gamma = -\frac{1}{r + nk}$$

Et pour ces entiers k tels que $r + nk \neq 0$: $$u_0 = \gamma - \frac{1}{r + nk}$$

On conclut : $$E = \left\{ \gamma - \frac{1}{r + nk} \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ et } r + nk \neq 0 \right\}$$

Précisons la convergence de la suite u :

Comme v diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, on déduit : u converge vers γ.