EXEMPLES D'ÉTUDE PROBABILISTE DE SITUATIONS CONCRÈTES

Exercice 1 *Loi hypergéométrique*

1. Dans une population de N individus divisée en deux sous-populations A et B de proportions p et $1 - p$ respectivement, on prélève un échantillon E de n individus ($n \leqslant N$). On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de l'échantillon E appartenant à la sous-population A.

   Montrer que : $$\forall\, k \in [\![0\,;\,n]\!],\ p(X = k) = \frac{C_{pN}^{k} C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_N^n}$$

   Puis que : $$E(X) = np$$

2. <u>Application</u> : un joueur coche une grille de loto (il choisit 6 numéros parmi 49).

   Calculer la **probabilité qu'il obtienne k numéros gagnants** ($k \in [\![0, 6]\!]$). (Sans tenir compte du n° complémentaire)

   En moyenne, combien de numéros gagnants obtient-on en jouant une grille de loto ?

Exercice 2 *Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson*

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = \dfrac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$.

1. Démontrer que, dans ces conditions :

   $$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lim_{n\to+\infty} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k\,!}$$

   On dit que l'on approche la loi binomiale par la loi de Poisson
   En pratique, on fait cette approximation quand p est très petit.

2. <u>Application</u> : une petite compagnie d'assurance prend en charge $n = 100$ clients. La probabilité, sur une année, qu'un assuré ait un gros sinistre est $p = 0{,}02$. On admet que les sinistres sont indépendants les uns des autres. On considère que la compagnie fait faillite si, la même année, 5% de ses clients ont un gros sinistre.

   a. Calculer la **probabilité que la compagnie d'assurance fasse faillite une année donnée**.

   b. **Comment évoluent les risques de faillite si la compagnie double son nombre de clients ?**

Exercice 3 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - Approximation de la loi binomiale par la loi normale.*

40% des individus d'une population possèdent un caractère C. On considère un échantillon de 200 individus. Peut-on affirmer, à 99%, que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50% ?

Exercice 4 *Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales*

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive.

On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité.

Sachant que le test est positif, **quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive** ?

Données :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,99.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,001.

Exercice 5 *Calcul d'espérance pour des variables aléatoires continues*

Un parisien prend le métro pour se rendre à son travail.

L'heure de son arrivée à la station de métro de départ est uniformément répartie entre 7 et 8 heures du matin.

Pour se rendre à son travail, il a le choix entre la ligne n°4 ou la ligne n°7 dont les heures de passage sont :

n°4 : 7h00 ; 7h15 ; 7h30 ; 7h45 ; 8h00 n°7 : 7h05 ; 7h20 ; 7h35 ; 7h50

Le voyageur monte dans la première rame de métro (n°4 ou n°7) qui se présente.

1. On désigne par X l'attente -en minutes- du voyageur sur le quai.
   a. Déterminer la densité f et la fonction de répartition F de X et les représenter.
   b. Calculer la **durée moyenne d'attente du voyageur sur le quai**.
2. La durée du voyage en métro dure 15 minutes avec la ligne n°4 et 20 minutes avec la ligne n°7.

   Le voyageur met 10 minutes pour se rendre de son domicile à la station de métro de départ, puis un temps négligeable pour se rendre de la station de métro d'arrivée à son lieu de travail.

   On désigne par Y le temps total mis par le voyageur entre son domicile et son lieu de travail.

   Calculer le **temps moyen mis par le voyageur pour se rendre de son domicile à son lieu de travail**.

Exercice 6 *Notion d'indépendance - Utilisation d'un arbre.*

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

On note :

B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 7 *Matrices stochastiques - Chaînes de Markov*

Trois personnes A, B et C jouent au ballon.

Si A possède le ballon, il le passe à B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Si B possède le ballon, il le passe à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Si C possède le ballon, il le passe à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : "A (resp. B, C) reçoit le ballon après le $n^{\text{ème}}$ échange" et $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$.

On suppose qu'à l'instant initial, A possède la ballon. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$ et calculer ses éléments propres.
2. **Calculer la probabilité que chacun des joueurs possède le ballon après le $5^{\text{ème}}$ échange**.
3. Montrer que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice M_∞ que l'on calculera. **Interpréter $M_\infty X_0$.**

Quelques lois discrètes

Loi	Exemple de situation	Notation	Image $X(\Omega)$	$p(X=k)$	Espérance et variance
Uniforme	Tirage équitable d'un objet parmi n objets numérotés de 1 à n.	X = n° tiré $X \longrightarrow U(n)$	$[\![1, n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	Réalisation d'une expérience à 2 issues Succès (avec probabilité p) ou Echec	X = indicatrice du Succès $X \longrightarrow B(1, p)$	$\{0 ; 1\}$	$p(X=1) = p$ $p(X=0) = 1-p$	$E(X) = p$ $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$
Binomiale	Somme de n expériences de Bernoulli de paramètre p	X = nombre de succès $X \longrightarrow B(n, p)$	$[\![0, n]\!]$	$p(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$	$E(X) = np$ $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
Hypergéométrique	Tirage de n individus parmi N dont une proportion p est du type A	X = nombre d'individus du type A $X \longrightarrow H(N, n, p)$	$[\![0, n]\!]$	$p(X=k) = \frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$	$E(X) = np$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{Np(1-p)}{N-1}(N-n)$
Géométrique	Somme d'expériences de Bernoulli de paramètre p	X = rang du premier succès $X \longrightarrow G(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(X=k) = (1-p)^{k-1}p$	$E(X) = \frac{1}{p}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Poisson	Somme d'expériences de Bernoulli dont la l'espérance est λ	X = nombre de succès $X \longrightarrow P(p)$	$\mathbb{N}$	$p(X=k) = \mathbf{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$ $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

Quelques lois de variables à densité

Loi	Uniforme sur $[a, b]$	Exponentielle sur $[0, +\infty[$	Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$
Densité f	$f(t) = \frac{1}{b-a}$	$f(t) = \lambda\, \mathbf{e}^{-\lambda t}$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathbf{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

Quelques théorèmes

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ p(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

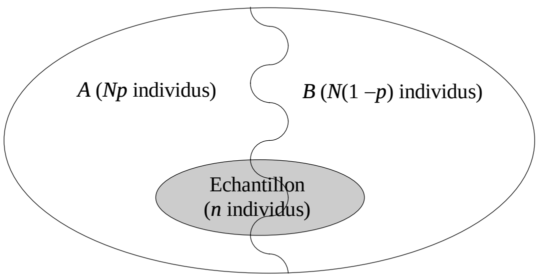
Théorème "central limit"

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance μ et da variance $\sigma^2 <$ $+\infty$.

On pose : $$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$ (variable centrée et réduite)

Alors : la suite $(Y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, en loi, vers $\mathcal{N}(0, 1)$

<u>Exercice 1</u> *Loi hypergéométrique*



1. On prélève un échantillon E de n individus. Donc :

$$\Omega = \text{ensemble des parties à } n \text{ éléments de la population}$$

$$\text{Card }\Omega = C_N^n$$

X est la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de l'échantillon E qui sont dans A.

On a donc : $$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons A_k l'événement :

$$A_k = \text{"l'échantillon } E \text{ contient } k \text{ individus dans } A \text{ (et donc } n - k \text{ dans } B\text{)"}$$

Ainsi : $$p(X = k) = \frac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$$

On note : $$X \hookrightarrow H(N, n, p)$$

Calcul de l'espérance de la loi hypergéométrique :

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons X_i la variable aléatoire définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ individu de } E \text{ est dans } A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

X_i est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Donc :

$$p(X_i = 1) = p$$

D'où : $$E(X_i) = p$$

Or, on a : $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

D'où, par linéarité de l'espérance : $$E(X) = np$$

<u>Remarque</u> : on peut retrouver ce résultat en écrivant :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, p(X = k)$$

et en utilisant la formule de Vandermonde.

2. L'univers Ω est l'ensemble des parties à 6 éléments de l'ensemble $[\![1\,;\,49]\!]$ et :

$$\mathrm{Card}(\Omega) = C_{49}^{6}$$

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de numéros gagnants. On a :

$$X(\Omega) = [\![0\,;\,6]\!]$$

Alors : $$X \hookrightarrow H(49,\, 6,\, \tfrac{6}{49})$$

On a, pour tout $k \in [\![0\,;\,6]\!]$: $$p(X = k) = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^{6}}$$

On trouve (à trois chiffres significatifs près) :

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = k)$	0,436	0,413	0,132	0,0177	$9{,}69 \times 10^{-4}$	$1{,}84 \times 10^{-5}$	$7{,}15 \times 10^{-8}$

$$E(X) = np = 6 \times \frac{6}{49} = \frac{36}{49} \simeq 0{,}735$$

En moyenne, on obtient moins d'un numéro gagnant par grille cochée.

Exercice 2 *Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson*

1. D'une part : $$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

   D'autre part : $$p^k = \frac{\lambda^k}{n^k}$$

   Et enfin : $$(1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbf{e}^{-\lambda}$$

   D'où : $$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \mathbf{e}^{-\lambda} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathbf{e}^{-\lambda}$$

   D'où le résultat : $$\forall k \in [\![0,\, n]\!],\ \lim_{n\to+\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \mathbf{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

2. <u>Application</u> :

   a. Notons X le nombre de clients qui ont un gros sinistre durant l'année en question.

   $$X \hookrightarrow B(100\,;\,0{,}02)$$

   On approche X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2$. Alors

   $$p(X \geqslant 5) = 1 - p(X = 4) \simeq 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbf{e}^{-2}\frac{2^k}{k!} \simeq 0{,}0526$$

   Il y a environ une "chance" sur 20 que l'assureur fasse faillite une année donnée.

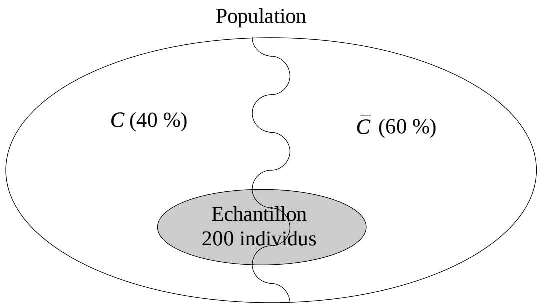
   b. Maintenant $\lambda = np = 200 \times 0{,}02 = 4$

   $$p(X \geqslant 10) = 1 - p(X \leqslant 9) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \mathbf{e}^{-4}\frac{4^k}{k!} \simeq 0{,}0081$$

   Il y a moins d'une chance sur 100 de faire faillite.

   Moralité : doubler le nombre de client ne réduit pas les risques de moitié mais bien plus sensiblement.

Exercice 3 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - Approximation de loi binomiale par la loi normale.*



Pour tout $i \in [\![1, 200]\!]$, notons X_i la variable aléatoire définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ individu de l'échantillon possède le caractère } C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

X_i est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre 0,4.

Notons $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = nombre d'individus de l'échantillon qui possèdent le caractère C

Alors : $$X \hookrightarrow B(200 ; 0{,}4)$$

On a donc : $$E(X) = np = 80 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 48$$

La fréquence d'apparition du caractère C dans la population est : $\dfrac{X}{200}$

On veut estimer : $$p\left(0{,}3 \leqslant \frac{X}{200} \leqslant 0{,}5\right) = p(60 \leqslant X \leqslant 100) = p(|X - E(X)| \leqslant 20)$$

<u>Première méthode</u> : *utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

On la rappelle : $$p(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

On a donc : $$p(|X - E(X)| \leqslant 20) = 1 - p(|X - E(X)| \geqslant 21) \geqslant 1 - \frac{48}{21^2} \geqslant 0{,}89$$

L'inégalité est trop faible pour que l'on puisse affirmer à 99% que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50%.

<u>Deuxième méthode</u> : *Approximation de la loi binomiale par la loi normale*

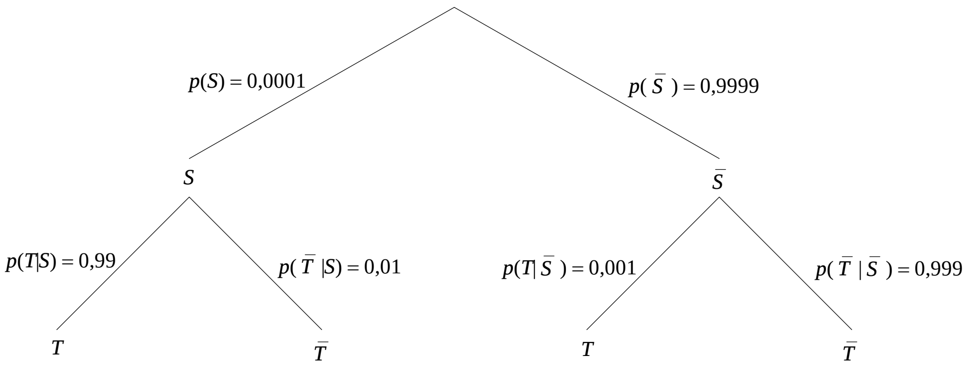
$$p(|X - E(X)| \leqslant 20) = p\left(\frac{-20}{4\sqrt{3}} \leqslant \frac{X - E(X)}{4\sqrt{3}} \leqslant \frac{20}{4\sqrt{3}}\right) \simeq 2\int_0^{\frac{5}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \simeq 0{,}996$$

Conclusion : oui, on peut affirmer à 99% que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50%.

Exercice 4 *Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales*

Notons S l'événement "l'individu est séropositif" et T "le test est positif"

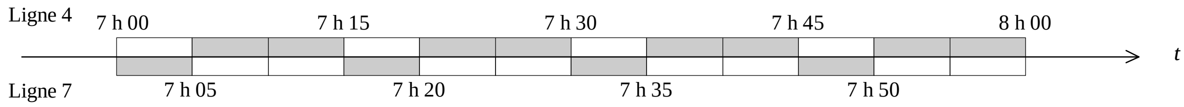
Illustrons la situation à l'aide d'un arbre :



$$p(S|T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)\,p(S)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)\,p(S)}{p(T \mid S)\,p(S) + p(T \mid \bar{S})\,p(\bar{S})} = \frac{1}{1 + \dfrac{p(T \mid \bar{S})\,p(\bar{S})}{p(T \mid S)\,p(S)}} \simeq 0{,}090 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Conclusion : même si le test est positif, on a environ 9 chances sur 10 de ne pas être malade !

Exercice 5 *Calcul d'espérance pour des variables aléatoires continues*



1. a. Partageons l'heure en 12 tranches de 5 minutes.

   On constate que le voyageur attend entre 0 et 10 minutes maximum.

   On constate également que sur ces 12 tranches, il y en a 8 pour lesquelles il attendre moins de 5 minutes (en gris sur la figure) et donc 4 pour lesquelles il attendra entre 5 et 10 minutes.

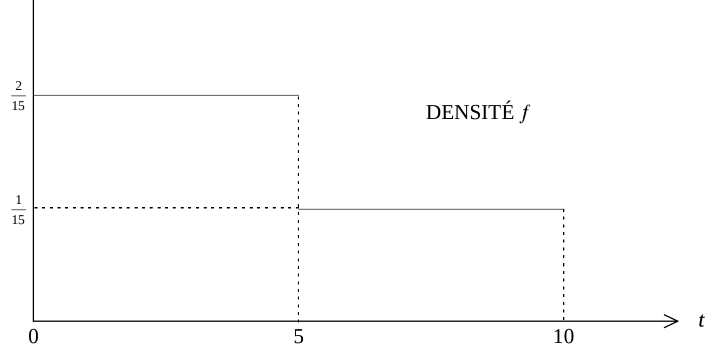
   Il y a donc 2 chances sur 3 d'attendre moins de 5 minutes et 1 chance sur 3 d'attendre plus de 5 minutes.

   Comme on suppose que l'heure d'arrivée est uniformément répartie entre 7h00 et 8h00, on a la représentation de la fonction densité f de X :

   $$f(t) = \begin{cases} a \text{ si } t \in [0;5[\\ b \text{ si } t \in [5;10[\end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes qui vérifient } a = 2b$$

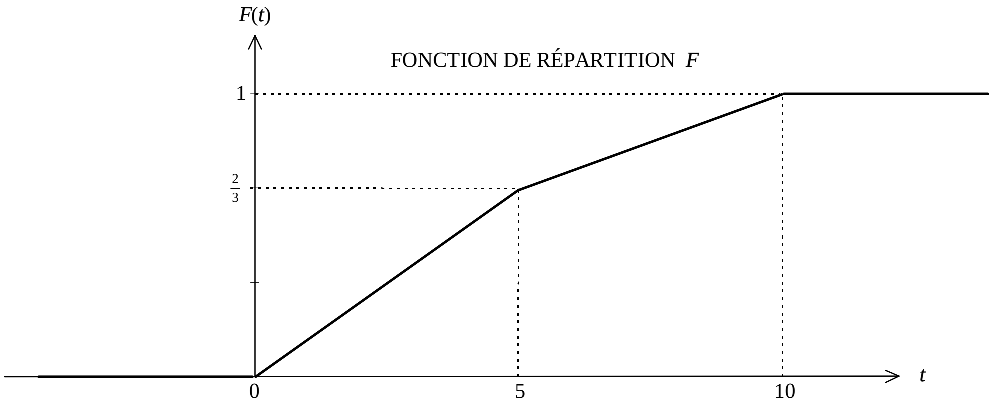
   Et comme on doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on en déduit : $5a + 5b = 1$, d'où $b = \dfrac{1}{15}$ d'où :

   $$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{15} \text{ si } t \in [0;5[\\ \frac{1}{15} \text{ si } t \in [5;10[\end{cases}$$



On en déduit, par primitivation, la fonction de répartition F de X :

$$F(x) = p(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;0[\\ \frac{2}{15}x \text{ si } x \in [0\,;5[\\ \frac{2}{3}+\frac{2}{15}x \text{ si } x \in [5\,;10[\\ 1 \text{ si } x \in [10\,;+\infty[\end{cases}$$



b. L'espérance de X est donnée par :

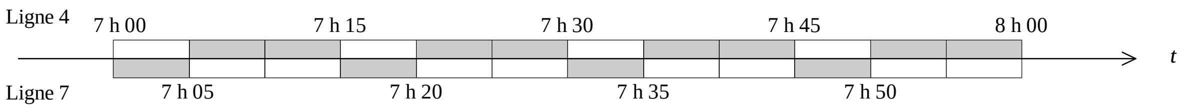
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 \frac{2t}{15}\mathrm{d}t + \int_5^{10} \frac{t}{15}\mathrm{d}t = \frac{25}{6}$$

Le temps moyen d'attente sur le quai est de <u>4 minutes et 10 secondes</u>.

2. Notons $Y = 10 + X + M$ où M est la durée du trajet en métro.

   Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y) = 10 + E(X) + E(M)$

   Calculons $E(M)$:



   Sur la figure ci-dessus, il y a 8 tranches (sur 12) pour lesquelles on prend la ligne 4.

   On a donc $p(M = 15) = \dfrac{2}{3}$ et $p(M = 20) = \dfrac{1}{3}$

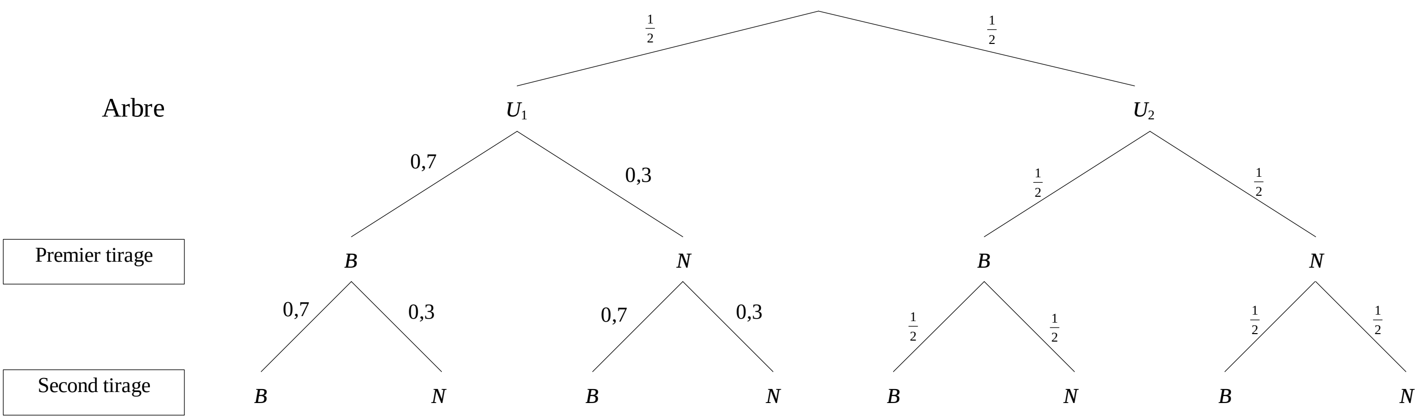
   D'où : $E(M) = 15 \times \dfrac{2}{3} + 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{50}{3}$

   On en déduit : $E(Y) = 10 + \dfrac{25}{6} + \dfrac{50}{3} = \dfrac{185}{6}$

   La durée moyenne du trajet domicile-travail est de <u>30 minutes et 50 secondes</u>.

Exercice 6 *Notion d'indépendance - Utilisation d'un arbre.*

Arbre



Comparons $p(B_1)p(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$

L'événement B_1 correspond au chemin U_1 B ou au chemin U_2 B

$p(B_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}6$

$p(B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$

L'événement B_2 correspond aux chemins U_1BB ; U_1NB ; U_2BB ; U_2NB

Donc $p(B_1)p(B_2) = 0{,}36$.

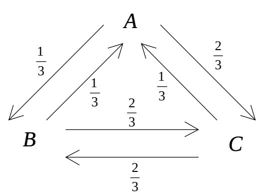
$p(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond aux chemins : U_1BB ; U_2BB

Comme $p(B_1)p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$, on déduit : **$B_1$ et B_2 ne sont pas indépendants.**

Remarque : ce résultat peut paraître surprenant. Il est dû à la composition différente entre boules blanches et noires dans les deux urnes et qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.

Exercice 7 *Matrices stochastiques - Chaînes de Markov*



1. On a :

$$p(A_{n+1}|A_n) = 0 \qquad p(A_{n+1}|B_n) = \frac{1}{3} \qquad p(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{3}$$

$$p(B_{n+1}|A_n) = \frac{1}{3} \qquad p(B_{n+1}|B_n) = 0 \qquad p(B_{n+1}|C_n) = \frac{2}{3}$$

$$p(C_{n+1}|A_n) = \frac{2}{3} \qquad p(C_{n+1}|B_n) = \frac{2}{3} \qquad p(C_{n+1}|C_n) = 0$$

D'après le théorème des probabilités totales, on a :

$$\begin{pmatrix} p(A_{n+1}) \\ p(B_{n+1}) \\ p(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$$

D'où : $$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a bien : $$X_{n+1} = MX_n$$

On dit que M est "stochastique" suivant les colonnes : ses coefficients sont dans [0 ; 1] et leur somme suivant les colonnes est égale à 1.

Pour calculer les valeurs propres de M, on peut calculer son polynôme caractéristique.

On peut aussi utiliser la propriété 1, ci-dessous, qui affirme que 1 est toujours valeur propre d'une matrice stochastique. Les deux autres valeurs propres (a priori complexes) λ_2 et λ_3 vérifient alors :

$$1+\lambda_2+\lambda_3 = \mathrm{Tr}(M) = 0 \quad \text{et} \quad 1\times\lambda_2\times\lambda_3 = \det(M) = \frac{2}{9}$$

D'où : $$\lambda_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Sp}(M) = \{-\frac{2}{3} \,;\, -\frac{1}{3} \,;\, 1\}$$

$$V_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(M, -\frac{2}{3}) \iff \begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=0 \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0 \\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff x=0 \ \text{ et } \ y=-z$$

$$\mathrm{SEP}(M, -\frac{2}{3}) = \mathbb{R}V_1 \ \text{ avec } V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(M, -\frac{1}{3}) \iff \begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=0 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=0 \\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=0 \end{cases} \iff x=-y \ \text{ et } \ z=0$$

$$\mathrm{SEP}(M, -\frac{1}{3}) = \mathbb{R}V_2 \ \text{ avec } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(M, 1) \iff \begin{cases} -x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=0 \\ \frac{1}{3}x-y+\frac{2}{3}z=0 \\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases} \iff x=\frac{5}{8}z \ \text{ et } \ y=\frac{7}{8}z$$

$$\mathrm{SEP}(M, 1) = \mathbb{R}V_3 \ \text{ avec } V_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Il suffit de calculer : $X_5 = M^5 X_0$

La calculatrice donne : $X_5 = \begin{pmatrix} \frac{20}{81} \\ \frac{73}{243} \\ \frac{110}{243} \end{pmatrix}$

Pour un calcul explicite de M^n, on peut diagonaliser M. (M est bien diagonalisable car admet trois valeurs propres distinctes)

3. On peut (via une diagonalisation) calculer M^n et en déduire le résultat.

On sait que M est semblable à $D = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notons B la base canonique et B' la base de vecteurs propres (V_1, V_2, V_3).

Notons : $P = \mathrm{Pass}(B, B') = \mathrm{Mat}(I_3, B', B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$

P est la matrice des coordonnées des vecteurs propres exprimés dans la base canonique.

Ainsi, on a :

$$\begin{tikzcd} (M_{3,1}(\mathbb{R}), B) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & (M_{3,1}(\mathbb{R}), B) \\ (M_{3,1}(\mathbb{R}), B') \arrow[r, "D"] & (M_{3,1}(\mathbb{R}), B') \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

Et : $M = PDP^{-1}$

D'où par récurrence :

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$

Et par passage à la limite (justifié à la propriété 4 ci-dessous) :

$$M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le vecteur : $M_\infty X_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,35 \\ 0,40 \end{pmatrix}$

Ce qui donne une **tendance à long terme** : A a le ballon 25% du temps, B 35% du temps et C 40 % du temps.

ANNEXE : QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES STOCHASTIQUES

Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est stochastique suivant les lignes si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{ij} \in [0 ; 1] \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

On dit que M est stochastique suivant les colonnes si ${}^tM$ l'est suivant les lignes.

Propriété 1
Soit M une matrice stochastique. Alors $1 \in \mathrm{Sp}(M)$

Démonstration :

Supposons M stochastique suivant les lignes.

On a alors $$M\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

Donc 1 est valeur propre de M associée au vecteur propre $X\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

Si M est stochastique suivant les colonnes alors, d'après ce qui précède : $1 \in \mathrm{Sp}({}^tM)$

Or, on rappelle que :

$$\chi_{{}^tM}(\lambda) = \det({}^tM - \lambda I) = \det({}^t(M - \lambda I)) = \det(M - \lambda I) = \chi_M(\lambda)$$

Donc : $$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}({}^tM)$$

D'où : $$1 \in \mathrm{Sp}(M)$$

Propriété 2
Le produit de matrices stochastiques est stochastique.

Démonstration :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques suivant les lignes.

Notons $C = (c_{ij})$ le produit AB.

On sait que : $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Or, a_{ik} et b_{kj} sont dans $[0 ; 1]$, d'où :

$$0 \leqslant c_{ij} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

Et comme $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$: $$0 \leqslant c_{ij} \leqslant 1$$

De plus : $$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\times 1 = 1$$

Donc $C = AB$ est bien stochastique suivant les lignes.

Remarque :

On a vu que $X\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et de B pour la valeur propre 1.

On a alors : $$CV = ABV = AV = V$$

Donc X est aussi un vecteur propre de C pour la valeur propre 1.

On retrouve alors : $$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1$$

Supposons maintenant A et B stochastiques suivant les colonnes, alors :

$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ est stochastique suivant les lignes donc AB est bien stochastique suivant les colonnes

Exercice : démontrer que l'image d'un vecteur de probabilités (c'est-à-dire un vecteur stochastique suivant sa colonne) par une matrice stochastique suivant les colonnes est un vecteur de probabilités.

Propriété 3

Le rayon spectral d'une matrice stochastique M est égal à 1 : $\rho(M) = 1$

Démonstration :

Soit M une matrice stochastique suivant les lignes. (Si M est stochastique suivant les colonnes, on applique ce qui suit à ^tM et on conclut en utilisant que $\rho(M) = \rho(^tM)$.)

Soit $|||\,.\,|||$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ ||MX|| \leqslant |||M|||\ ||X|| \qquad (\ast)$$

Commentaire : on dit alors que $|||\,.\,|||$ est une norme d'Algèbre (ou norme matricielle). Une telle norme existe toujours en dimension finie. Il suffit, par exemple de choisir une norme $|||\,.\,|||$ subordonnée à une norme $||\,.\,||$ sur $M_n(\mathbb{R})$:

$$|||M||| = \sup_{||X||=1} ||MX||$$

(Ce sup existe bien par continuité de la norme sur la boule unité qui est compacte en dimension finie (Théorème de Riesz))

Pour $X = 0$, la relation $(\ast)$ est clairement vérifiée.

Supposons $X \neq 0$ et posons $X_0 = \dfrac{X}{||X||}$. Donc $||X_0|| = 1$.

Comme $|||M||| = \sup\limits_{||X||=1} ||MX||$, on a : $$|||M||| \geqslant ||MX_0||$$

Or : $$||MX_0|| = \frac{||MX||}{||X||}$$

D'où : $$|||M|||\ ||X|| \geqslant ||MX||$$

D'où $(\ast)$.

On peut démontrer également que :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ |||AB||| \leqslant |||A|||\ |||B|||$$

Cette propriété sera très utile pour les démonstrations suivantes.

En effet : $$|||AB||| = \sup_{\|X\|=1} \| A(BX) \| \leqslant |||A||| \sup_{\|X\|=1} \| BX \| = |||A|||\ |||B|||$$

Prouvons maintenant la propriété 3 :

Choisissons la norme $|||\ .\ |||_\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$ qui est subordonnée à la norme $\|\ .\ \|_\infty$ sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, ainsi :

$$|||M|||_\infty = \sup_{\|X\|_\infty=1} \| MX \|_\infty$$

Notons $$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Supposons $\|X\|_\infty = 1$, c'est-à-dire $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$

On a donc nécessairement : $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |x_i| \leqslant 1$$

Or, dans ce cas : $$MX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_1 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_n \end{pmatrix}$$

D'où : $$\|MX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij}x_i | \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

Et comme M est stochastique, $\sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} | = 1$, d'où : $\|MX\|_\infty \leqslant 1$

Et donc, en passant à la borne supérieure : $$|||M|||_\infty \leqslant 1$$

(Remarque : en choisissant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\|MX\|_\infty = \|X\|_\infty = 1$, donc $|||M|||_\infty = 1$)

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. (Existe car $\mathrm{Sp}(M)$ n'est pas vide car, d'après la propriété 1, il contient 1)

Soit V un vecteur propre associé à λ tel que $\|V\|_\infty = 1$.

Alors : $$\|MV\|_\infty \leqslant |||M|||_\infty \|V\|_\infty \leqslant 1$$

$$|\lambda|\ \|V\|_\infty \leqslant 1$$

$$|\lambda| \leqslant 1$$

D'où $\rho(M) \leqslant 1$ et comme $1 \in \mathrm{Sp}(M)$: $$\rho(M) = 1$$

Propriété 4

Soit M une matrice stochastique telle que la valeur propre 1 soit simple et dominante[1] . Alors :

la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Démonstration :

Soit M une matrice stochastique à m lignes et m colonnes ($m \in \mathbb{N}^*$).

- Supposons que M est diagonalisable, alors le résultat est immédiat puisque :

$$\exists P \in GL_m(\mathbb{C}), \exists \Delta \in D_m(\mathbb{C}), \ M = P\Delta P^{-1}$$

($D_m(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre m à coefficients dans $\mathbb{C}$)

Notons $$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$ où $\{\lambda_1 ; \dots ; \lambda_m\} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$

Une récurrence facile donne : $$M^n = P\Delta^n P^{-1}$$

Et $$\Delta^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

Or, $\rho(M) = 1$, donc les valeurs propres $\lambda_1 ; \dots ; \lambda_m$ sont de module inférieur ou égal à 1.

De plus, ces valeurs propres sont différentes de -1. (Sinon 1 ne serait pas valeur propre dominante)

La suite (Δ^n) converge donc vers une certaine matrice Δ_∞ diagonale avec que des 1 et des 0 sur la diagonale (la valeur propre 1 apparaît, par hypothèse, une seule fois sur la diagonale)

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |||\Delta^n - \Delta_\infty||| \leqslant \varepsilon)$

Posons $M_\infty = P\Delta_\infty P^{-1}$. On a alors :

$$M^n - M_\infty = P\Delta^n P^{-1} - P\Delta_\infty P^{-1} = P(\Delta^n - \Delta_\infty)P^{-1}$$

D'où, pour $n \geqslant N$: $|||M^n - M_\infty||| \leqslant |||P||| \times |||\Delta^n - \Delta_\infty||| \times |||P^{-1}||| \leqslant |||P|||\ \varepsilon\ |||P^{-1}||| \leqslant \varepsilon$

Ce qui prouve bien que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M_∞.

- Dans le cas où M n'est pas diagonalisable, on la trigonalise par blocs triangulaire (possible puisque le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$) :

$$\exists P \in GL_m(\mathbb{C}), \exists T \in M_m(\mathbb{C}), \ M = PTP^{-1}$$

et comme 1 est valeur propre simple de M, on a :

$$T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$ où $A \in M_{m-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure

Et comme 1 est valeur propre dominante de M, on a :

$$\rho(A) < 1$$

Puisque le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, on a, d'après la décomposition de Dunford :

$$A = D + N$$

où D est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, N nilpotente, $DN = ND$.

[1] On dit alors que M est ergodique. Il existe d'autres critères d'ergodicité, voir les ouvrages spécialisés.

Comme N et D commutent, on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = D^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

Notons p l'ordre de nilpotence de la matrice N. (On a $p \geqslant 2$ puisque M est supposée non diagonalisable)

Pour tout $n \geqslant p$, on a donc :

$$A^n = D^n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

En notant $K = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p-1} \binom{n}{k} \| N \|^k$, il vient :

$$\|A\|^n \leqslant \|D\|^n + K \sum_{k=1}^{p-1} \| D \|^{n-k} \leqslant \|D\|^n + K \|D\|^{n-p+1} \sum_{k=1}^{p-1} \| D \|^{p-1-k}$$

$$\|A\|^n \leqslant \|D\|^n + K \|D\|^{n-p+1} \sum_{k=1}^{p-1} \| D \|^k \leqslant \|D\|^n + K \|D\|^{n-p+1} \frac{1 - \| D \|^{p-1}}{1 - \| D \|}$$

Comme $\rho(D) < 1$, on a $\|D\| \neq 1$.

Comme les valeurs propres de D sont toutes de module strictement inférieur à 1, on a :

$$\|D\|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Il vient : $$\|A\|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D'où : $$T^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ce qui prouve bien que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $M_\infty = P \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1}$.

<u>Propriété 5</u>

Soit M une matrice stochastique telle que la valeur propre 1 soit simple et dominante. Alors :

Pour tout vecteur de probabilité X_0 de $M_n(\mathbb{R})$,

la suite $(M^n X_0)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique vecteur de probabilité V invariant par M.

<u>Démonstration</u> :

On a vu que dans ce cas, la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice M_∞.

Donc la suite $(M^n X_0)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $M_\infty X_0$.

Mais la suite $(M^n X_0)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $M^{n+1} X_0 = M(M^n X_0)$

Donc, sa limite est un vecteur V tel que : $V = MV$ (Vecteur propre pour 1 ou vecteur invariant)

Or, SEP(M, 1) est de dimension 1 et V est un vecteur de probabilité (car X_0 l'est) donc V est unique.