

SOMMAIRE

| | |
|---|-----------|
| 1. Convergence. Divergence. Généralités | 1 |
| 1.1. Définition | 2 |
| 1.2. Propriété : unicité de la limite | 3 |
| 1.3. Définition : suites de Cauchy | 3 |
| 1.4. Propriété : (u_n) converge $\Rightarrow (u_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (u_n)$ bornée. Exemple : divergence de la série harmonique | 3 |
| 1.5. Opérations algébriques sur les suites convergentes | 4 |
| 1.6. Opérations algébriques sur les suites divergentes vers $+\infty$ | 5 |
| 1.7. Théorème : suites et applications continues. Exemple : $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0 | 6 |
| 1.8. Cas des suites récurrentes | 7 |
| 1.9. Théorème de Césaro | 8 |
| 2. Quelques théorèmes de comparaison et d'encadrement | 9 |
| 2.1. et 2.2. Théorèmes de compatibilité avec l'ordre | 9 |
| 2.3. Cas des suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$. Exemple : divergence vers $+\infty$ de la série harmonique | 10 |
| 2.4. Théorème des "gendarmes". Exercice : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k} \rightarrow 2$ | 10 |
| 2.5. Théorème de la limite monotone | 11 |
| 2.5.1. Application : constante d'Euler | 12 |
| 2.5.2. Une suite monotone est soit convergente soit divergente (vers $+\infty$ ou $-\infty$) | 12 |
| 2.6. Suites adjacentes | 13 |
| 2.6.1. Application 1 : nombre e | 14 |
| 2.6.2. Application 2 : moyenne arithmético-géométrique | 15 |
| 2.7. Théorème des segments emboîtés | 16 |
| 3. Suites extraites. Valeur d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass | 16 |
| 3.1. Définition : suite extraite et valeur d'adhérence | 16 |
| 3.2. Théorème : lien entre la limite d'une suite et celle de ses extraites. Exercice : divergence de $(\cos n)$ | 17 |
| 3.3. Propriété : suite extraite des termes pairs et suite extraite des termes impairs | 18 |
| 3.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass | 19 |
| 3.4.1. \mathbb{R} est complet | 20 |
| 3.4.2. Théorème de Heine | 21 |
| 3.4.3. Théorème : une suite bornée n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence converge | 22 |
| 4. Quelques applications | 23 |
| 4.1. Théorème : fonction continue sur un segment | 23 |
| 4.2. Théorème spécial à certaines séries alternées | 24 |

1. Convergence. Divergence. Généralités

1.1. Définition

- On dit qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

- Si un tel réel ℓ n'existe pas, on dit que (u_n) diverge.

Avec les quantificateurs, la divergence s'écrit :
 $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$

- On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$$

- On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$, autrement dit :

$$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq -B)$$

$$B = -A$$

Exemples de manipulation directe de cette définition :

- Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.

Supposons au contraire qu'elle converge vers un certain réel ℓ :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |(-1)^n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, cela donne :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \ell - \frac{1}{2} \leq (-1)^n \leq \ell + \frac{1}{2})$$

Pour un entier n pair tel que $n \geq N$, on a : $\ell - \frac{1}{2} \leq 1 \leq \ell + \frac{1}{2}$

Donc : $\ell \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Pour un entier n impair tel que $n \geq N$: $\ell - \frac{1}{2} \leq -1 \leq \ell + \frac{1}{2}$

Donc : $\ell \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$

Absurde, donc (u_n) diverge.

On verra plus loin une autre démonstration à l'aide des suites extraites.

- Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Le calcul des premiers termes de (v_n) nous amène à la conjecture : (v_n) converge vers le réel 0. Montrons-le.

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On cherche à prouver l'existence d'un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon)$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow 1 \leq n\varepsilon)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon})$$

On constate qu'il suffit de choisir : $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Donc (v_n) converge vers 0.

1.2. Propriété *Unicité de la limite*

Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons :

- (u_n) converge vers ℓ_1 : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon)$
- (u_n) converge vers ℓ_2 : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon)$

Posons $N = \max(N_1 ; N_2)$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient : $\ell_1 = \ell_2$

Notation :

la convergence de (u_n) vers ℓ se note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$

la divergence de (u_n) vers $+\infty$ se note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

1.3. Définition *Suites de Cauchy*

On dit qu'une suite (u_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon)$$

Remarque : par négation, (u_n) n'est pas de Cauchy lorsque :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geq N \text{ et } |u_p - u_q| > \varepsilon)$$

1.4. Propriétés

(u_n) converge $\Rightarrow (u_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (u_n)$ bornée

Démonstration :

Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ . Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Soient maintenant des entiers p et q tels que : $p > q \geq N$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est de Cauchy.

(On verra, plus loin que, pour les suites réelles, la réciproque est vraie)

Comme (u_n) est de Cauchy, on a avec $\varepsilon = 1$ et $q = N$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_1 \Rightarrow |u_p - u_N| \leq 1)$$

C'est-à-dire :

$$p \geq N_1 \Rightarrow u_N - 1 \leq u_p \leq u_N + 1$$

Posons :

$$M = \max\{|u_0|; \dots; |u_{N-1}|, |u_N + 1|\}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Donc (u_n) est bornée.

Exemple :

Montrer la divergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\text{Série harmonique})$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{2N} - u_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} > N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

Donc, il existe un ε (à savoir $\frac{1}{2}$) tel que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ (à savoir $q = N$

et $p = 2N$) vérifiant $p > q \geq N$ et $|u_p - u_q| > \varepsilon$.

Ce qui prouve que la suite (u_n) **n'est pas de Cauchy**.

D'après la contraposée de 1.4., on en déduit que (u_n) ne converge pas, donc (u_n) diverge.

On verra plus loin que (u_n) diverge vers $+\infty$.

1.5. Opérations algébriques sur les suites convergentes

a) (u_n) converge vers ℓ_1 et (v_n) converge vers $\ell_2 \Rightarrow (u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

b) (u_n) bornée et (v_n) converge vers 0 $\Rightarrow (u_n v_n)$ converge vers 0.

c) (u_n) converge vers ℓ_1 et (v_n) converge vers $\ell_2 \Rightarrow (u_n v_n)$ converge vers $\ell_1 \ell_2$.

d) (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Démonstration :

a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Posons $N = \max(N_1; N_2)$. On a alors :

$$n \geq N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui prouve que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

b) Comme (u_n) est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (v_n) converge vers 0 :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M})$$

Donc :
$$n \geq N \Rightarrow |u_n v_n| \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

c) On écrit :
$$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = (u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)$$

On a :

$$\begin{cases} u_n - \ell_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ (v_n) \text{ bornée (car convergente)} \end{cases}$$

D'après b), on déduit $(u_n - \ell_1) v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

De même, on montre que $\ell_1 (v_n - \ell_2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Et d'après a), on déduit $u_n v_n - \ell_1 \ell_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ d'où c).

d) Quitte à changer u_n en son opposé, on peut supposer $\ell > 0$.

Comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

En particulier avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on obtient :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow 0 < \frac{\ell}{2} \leq u_n)$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Toujours, comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Pour $n \geq \max(N_1 ; N_2)$ on a alors :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|\ell - u_n|}{u_n \ell} \leq \frac{2\varepsilon}{\ell^2}$$

Ce qui prouve que $\left(\frac{1}{u_n} \right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

1.6. Opérations algébriques sur les suites divergentes vers $+\infty$

a) (u_n) diverge vers $+\infty \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \right)$ converge vers 0.

b) (u_n) converge vers 0 et (u_n) strictement positive $\Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \right)$ diverge vers $+\infty$.

c) (u_n) converge vers $\ell > 0$ et (v_n) diverge vers $+\infty \Rightarrow (u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration :

a) (u_n) diverge vers $+\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $A = \frac{1}{\varepsilon}$, on obtient :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{\varepsilon})$$

Par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} \right| \leq \varepsilon)$$

Donc $\left(\frac{1}{u_n} \right)$ converge vers 0.

b) Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) converge vers 0, on a avec $\varepsilon = \frac{1}{A}$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{A})$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geq A)$$

Donc $\left(\frac{1}{u_n} \right)$ diverge vers $+\infty$.

c) Comme (u_n) converge vers $\ell > 0$, on obtient avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow 0 < \frac{\ell}{2} \leq u_n)$$

Comme (v_n) diverge vers $+\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \Rightarrow v_n \geq \frac{2A}{\ell})$$

Pour tout $n \geq \max(N, N')$, on a alors : $u_n v_n \geq A$

Ce qui prouve bien que $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

1.7. Théorème Suites et applications continues

Soit X une partie non vide de \mathbb{R} .

Soit (u_n) une suite d'éléments de X convergeant vers un réel $\ell \in X$.

Soit f une application continue en ℓ et à valeurs dans \mathbb{R} .

La suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, comme f est continue en ℓ , on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } (|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)$$

Mais la suite (u_n) converge vers ℓ . Donc pour ce réel η ci-dessus, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \eta$$

On a donc, par transitivité des implications :

$$n \geq N \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Dans la pratique, on utilise souvent la version contraposée de 1.7, en ce sens : si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et si les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers des limites différentes, alors f n'est pas continue en ℓ .

Exemple :

Soit $\lambda \in [-1, 1]$.

Soit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f n'est pas continue en 0.

En effet, supposons le contraire.

Considérons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{2\pi n}$

Comme on a supposé f continue en 0, le théorème 1.6. permet d'affirmer qu'alors :

$$f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = 1$ et $f(0) = \lambda$

Donc : $\lambda = 1$

Mais, considérons maintenant la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

Le même raisonnement que ci-dessus montre que : $\lambda = 0$

D'où une contradiction.

Donc f n'est pas continue en 0.

1.8. Conséquence du théorème 1.7.

Soit X une partie non vide de \mathbb{R} .

Soit f continue sur X telle que $f(X) \subset X$.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in X \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si (u_n) converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$

Démonstration :

Immédiat en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$

1.9. Exercice : théorème de CÉSARO

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ .

Alors la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :
$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

Autrement dit, le théorème de Césaro affirme que la convergence entraîne la convergence en moyenne.

converge également vers ℓ .

(On dit que (u_n) converge en moyenne vers ℓ ou converge au sens de Césaro)

Démonstration :

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k \geq N \Rightarrow |u_k - \ell| \leq \varepsilon)$$

Pour $n > N$, on a :

$$v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell)$$

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - \ell|$$

Posons $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - \ell|$.

Il est clair $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc : $\exists N' \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \Rightarrow |A_n| \leq \varepsilon)$

Pour $n > \max(N, N')$, on a alors :

$$|v_n - \ell| \leq A_n + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - \ell| \leq \varepsilon + \frac{n-N}{n} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Ce qui prouve bien que (v_n) converge vers ℓ .

Compléments sur le théorème de CÉSARO :

1. Une suite qui converge en moyenne ne converge pas nécessairement. Autrement dit, la réciproque du théorème de Césaro est fausse. Voici un contre-exemple :

$$u_n = (-1)^n$$

On voit que (u_n) diverge tandis que (v_n) définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

2. Le théorème de Césaro admet un prolongement pour les suites divergentes vers $+\infty$:

Soit (u_n) une suite divergeant vers $+\infty$.

Alors la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :
$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

diverge également vers $+\infty$.

Démonstration :

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Par hypothèse : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \Rightarrow u_n \geq 3A)$

Pour $n > N_0$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N_0+1}^n u_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0} u_k + 3 \frac{n - N_0}{n} A$$

Posons $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0} u_k$, ainsi : $v_n \geq A_n + 3A - 3 \frac{N_0}{n} A$

Il est clair $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc : $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow -A \leq A_n \leq A)$

De même, $-3 \frac{N_0}{n} A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow -A \leq -3 \frac{N_0}{n} A \leq A)$$

Si bien que pour $n \geq \max(N_0, N_1, N_2)$, on a :

$$v_n \geq -A + 3A - A$$

$$v_n \geq A$$

Ce qui prouve bien que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Dans cette version encore, la réciproque du théorème de Césaro est fausse. (Voir 3.3.)

2. Quelques théorèmes de comparaison et d'encadrement

2.1. Théorème *compatibilité avec l'ordre*

Si (u_n) converge et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ (resp. ≥ 0)

Alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0$

Les inégalités deviennent toutes larges lorsqu'on passe à la limite

Démonstration :

Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et supposons $\ell < 0$.

Pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$ (noter qu'on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$), la convergence de (u_n) s'écrit :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq \frac{\ell}{2} < 0)$$

Ce qui contredit l'hypothèse de positivité. Donc $\ell \geq 0$.

2.2. Conséquence

Si (u_n) et (v_n) convergent et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ (resp. $u_n \leq v_n$)

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Démonstration :

On applique 2.1. à la suite $(v_n - u_n)$.

2.3. Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

Si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$

Démonstration :

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) diverge vers $+\infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$$

Et comme $v_n \geq u_n$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow v_n \geq A)$$

Donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

Idem pour le second énoncé.

Exemple :

Prouver que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

D'après la décroissance de l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0; +\infty[$ on a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \quad (\text{Illustrer})$$

En sommant, pour n allant de 1 à N : $0 \leq \ln(N+1) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

D'où la divergence vers $+\infty$ de la série harmonique.

2.4. Théorème d'encadrement ou des "gendarmes"

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n)$
- (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ .

Alors (v_n) converge vers ℓ .

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Pour $n \geq \max(N_0, N_1, N_2)$, on a : $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$

Donc (v_n) converge vers ℓ .

Exercice :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}$$

Démontrer que (u_n) converge vers 2.

Pour $n \geq 5$, on a :

$$u_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n} = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$:

$$C_n^k \geq C_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

Donc :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

D'après le théorème des gendarmes, on déduit :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

2.5 Théorème limite "monotone"

Toute suite croissante et majorée converge
Toute suite décroissante et minorée converge

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.

On considère l'ensemble :

$$\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Cet ensemble étant non vide et majoré, il admet une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \ell - \varepsilon < u_N \leq \ell$$

Mais comme (u_n) est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n \leq \ell)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Donc (u_n) converge vers ℓ .

Même raisonnement pour les suites minorées et décroissantes.

2.5.1. Application : constante d'Euler

On considère la suite $u = (u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

Nous allons montrer, à l'aide du théorème 2.5. que cette suite converge.

On montre que u est décroissante :

Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Et, tenant compte de l'inégalité : $\forall X \in]-1, +\infty[, \ln(1 + X) \leq X$

On obtient avec $X = -\frac{1}{n} \in]-1, 0[$:

$$u_n - u_{n-1} \leq 0$$

Ce qui prouve la décroissance de la suite u .

On montre que u est positive (i.e. minorée par 0) :

Par décroissance de l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

En sommant pour k allant de 1 à $n - 1$:

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$

Bilan : la suite u est décroissante et minorée (par 0) donc converge.

Sa limite, notée γ , s'appelle la constante d'Euler.

2.5.2. Conséquence du théorème de la limite monotone

$$(u_n) \text{ croissante} \Rightarrow ((u_n) \text{ converge ou } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty)$$

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante.

- Si (u_n) est majorée, alors elle converge, d'après 2.5.
- Si (u_n) n'est pas majorée : $\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, u_N > M$

Et comme (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_N \geq M)$

Ce qui prouve bien que (u_n) diverge vers $+\infty$.

On montre de même que :

$$(u_n) \text{ décroissante} \Rightarrow ((u_n) \text{ converge ou } (u_n) \text{ diverge vers } -\infty)$$

Application : hypothèse supplémentaire pour obtenir la réciproque du théorème de Césaro

Soit (u_n) une suite monotone.

Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

On suppose que (v_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors (u_n) tend aussi vers ℓ .

Démonstration :

Comme (u_n) est monotone, elle converge ou diverge (vers $+\infty$ ou $-\infty$). Mais alors, d'après le théorème direct de Césaro, (v_n) aura le même comportement. Donc (u_n) se comporte bien comme (v_n) .

2.6. Définition Suites adjacentes

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases}$, on dit que les suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Remarque : la condition $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ est inutile dans les hypothèses. Elle découle des trois autres.

2.6. Théorème Suites adjacentes

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ .

De plus :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$$

Démonstration :

Montrons, tout d'abord :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$w_n = v_n - u_n$$

On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

Et d'après le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n \leq 0$$

Donc (w_n) est décroissante.

Donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geq n \text{ on a : } w_n \geq w_m$$

Et par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$$

C'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

On en déduit encore :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

On prouve maintenant la convergence des suites (u_n) et (v_n) grâce au théorème de la limite monotone :

Comme, (u_n) est croissante et majorée par v_0 , elle converge vers un certain réel ℓ .

Comme, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 , elle converge vers un certain réel ℓ' .

En écrivant enfin :
$$u_n = v_n + (u_n - v_n)$$

Un passage à la limite donne :
$$\ell = \ell' + 0$$

$$\ell = \ell'$$

Ci-contre, on démontre (et on utilise) qu'une suite décroissante et convergente vers 0 est nécessairement positive.

Enfin, on a nécessairement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$

En effet, supposons le contraire : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell < u_{n_0}$

Posons $\ell' = \frac{u_{n_0} + \ell}{2}$. (ℓ' est la moyenne de u_{n_0} et de ℓ et comme $\ell < u_{n_0}$, on a : $\ell < \ell' < u_{n_0}$).

Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geq n_0, \ell' < u_n$

Et par passage à la limite : $\ell' \leq \ell$

Ce qui contredit $\ell < \ell'$... Donc on a bien : $u_n \leq \ell$

On démontre, de même, que : $\ell \leq v_n$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

Remarque : si (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} < \ell < v_{n+1} < v_n$$

2.6.1. Application 1 : le nombre e

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{nn!}$ sont adjacentes.
2. Déterminer sept décimales de leur limite e.
3. Démontrer que e est un nombre irrationnel.

Remarque : on peut également poser $y_n = x_n + \frac{1}{n!}$.
Les calculs sont plus simples mais la convergence
(vers e) plus lente.

Solution :

1. La suite (x_n) est bien sûr strictement croissante.

Montrons que (y_n) est strictement décroissante en calculant $y_{n+1} - y_n$:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - x_n - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$y_{n+1} - y_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Donc (y_n) est strictement décroissante.

Enfin on a : $y_n - x_n = \frac{1}{nn!}$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$

Les suites (x_n) et (y_n) sont bien adjacentes donc admettent une limite commune (que l'on notera e)

2. On a donc, pour tout entier n : $x_n \leq e \leq y_n$

Il suffit de déterminer un entier n tel que : $\frac{1}{nn!} < 10^{-7}$

$n = 10$ convient. Donc $e \simeq x_{10}$ à 10^{-7} près.

On obtient : $e \simeq 2,7182818$ (à 10^{-7} près)

3. Supposons $e \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe des entiers p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.

On aurait en particulier : $x_q < \frac{p}{q} < y_q$

Réduisons au même dénominateur la somme $x_q = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}$. On peut écrire : $x_q = \frac{a}{q!}$ où $a \in \mathbb{N}$.

D'où :

$$\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{qq!}$$

En multipliant par $q!$:

$$a < p(q-1)! < a + \frac{1}{q} < a + 1$$

L'entier $p(q-1)!$ serait compris strictement entre a et $a+1$ qui sont des entiers consécutifs, ce qui est absurde. Donc $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Remarque : ceci prouve au passage, que \mathbb{Q} n'est pas complet (il existe des suites de rationnels qui convergent vers des irrationnels)

2.6.2. Application 2 : moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par : $a_0 = a$; $b_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Alors (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Solution :

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{4} - a_n b_n$$

$$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq b_{n+1}$$

Enfin, comme $a_0 > b_0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq b_n$$

Bien que ce résultat ne soit pas une hypothèse nécessaire du théorème des suites adjacentes, on l'utilise pour prouver les suivants :

- En effet, d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} \leq a_n$

Donc la suite (a_n) est décroissante.

- D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n} (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0$
(par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur \mathbb{R}_+)

Donc la suite (b_n) est croissante.

- On considère maintenant la propriété \wp définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : |a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n} |a - b|$$

- * On a bien sûr $\wp(0)$.

- * Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

Supposons $\wp(n)$:

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n} |a - b|$$

Utilisons la propriété : $0 \leq X \leq Y \Rightarrow 0 \leq (Y - X)^2 \leq Y^2 - X^2$

(Pour le démontrer, il suffit de multiplier l'inégalité $0 \leq Y - X \leq Y + X$ par $Y - X \geq 0$)

Comme $0 \leq b_n \leq a_n$, on a :

$$|a_{n+1} - b_{n+1}|^2 \leq |a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2| \stackrel{(1)}{\leq} \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \stackrel{\wp(n)}{\leq} \frac{|a-b|^2}{2^{2n+2}}$$

Et par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur \mathbb{R}_+ : $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |a - b|$

D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \wp(n) : |a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n} |a - b|$$

D'où, par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$

On a donc prouvé que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b . On ne connaît pas d'expression de cette limite mais elle est liée aux intégrales elliptiques de 2^{ème} espèce...)

2.7. Corollaire Théorème des segments emboîtés

Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
- $b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Alors : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$

Démonstration :

Par hypothèse, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers un même réel ℓ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$$

Donc : $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$

Et par passage à la limite : $\ell \leq x \leq \ell$

Donc : $x = \ell$

3. Suites extraites. Valeur d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass

3.1. Définition Suite extraite. Valeur d'adhérence

Soit (u_n) une suite et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

La suite $(u_{\sigma(n)})$ s'appelle suite extraite de (u_n) .

Si la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ , on dit que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n)

Une telle application σ s'appelle une extractrice.

Remarque : comme σ est strictement croissante, une simple récurrence montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geq n$$

3.2. Théorème

Si une suite (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite tend vers ℓ

Démonstration :

Cas où $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) converge vers ℓ : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$

Et comme $\sigma(n) \geq n$: $n \geq N \Rightarrow \sigma(n) \geq N \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \ell| \leq \varepsilon$

Ce qui prouve que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ .

Cas où $\ell = +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) diverge vers $+\infty$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$

Et comme $\sigma(n) \geq n$: $n \geq N \Rightarrow \sigma(n) \geq N \Rightarrow u_{\sigma(n)} \geq A$

Ce qui prouve que la suite $(u_{\sigma(n)})$ diverge vers $+\infty$.

Cas où $\ell = -\infty$

Analogue au précédent.

L'intérêt du théorème 3.2 est sa contraposée :

S'il existe deux suites extraites de (u_n) qui convergent vers des limites différentes, alors (u_n) diverge.

On retrouve ainsi la divergence de la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = -1$

Les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers des limites différentes, donc (u_n) diverge.

Exercice : divergence de la suite $(\cos n)$.

Supposons que la suite $(\cos n)$ converge vers un certain réel ℓ .

D'une part : $\cos(n+2) + \cos n = 2\cos(n+1)\cos 1$

Par passage à la limite : $2\ell = 2\ell\cos 1$

Et comme $\cos 1 \neq 0$: $\ell = 0$

D'autre part : $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$

Par passage à la limite : $\ell = 2\ell^2 - 1$

Ce qui contredit $\ell = 0$.

Donc la suite $(\cos n)$ diverge.

On montre, par des techniques similaires la divergence de la suite $(\sin n)$

Par " (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ", il faut entendre :
" (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou (u_n) diverge vers $+\infty$ "

Rappel :
 $\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

La réciproque du théorème 3.2. est vraie. Elle découle, par exemple, du résultat suivant :

3.3. Propriété

(u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ les deux suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) tendent vers ℓ .

Démonstration :

Le sens \Rightarrow est le théorème 3.2.

Montrons la réciproque.

Cas où $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_{2p}) converge vers ℓ : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon)$

Comme (u_{2p+1}) converge vers ℓ : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon)$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

Soit $n \geq N$.

Si $n = 2p$, alors $p \geq N_1$ et : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Si $n = 2p + 1$, alors $p \geq N_2$ et : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Dans tous les cas, on a : $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Ce qui prouve que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Cas où $\ell = +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_{2p}) diverge vers $+\infty$: $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_1 \Rightarrow u_{2p} \geq A)$

Comme (u_{2p+1}) diverge vers $+\infty$: $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_2 \Rightarrow u_{2p+1} \geq A)$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

Soit $n \geq N$.

Si $n = 2p$, alors $p \geq N_1$ et : $u_n \geq A$

Si $n = 2p + 1$, alors $p \geq N_2$ et : $u_n \geq A$

Dans tous les cas, on a : $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$

Ce qui prouve que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Cas où $\ell = -\infty$

Analogue au précédent.

Remarques :

- On peut étendre ce résultat à des familles de suites extraites dont les images des extractrices forment une partition de \mathbb{N} (et a fortiori un recouvrement de \mathbb{N}). Par exemple (u_{3p}) , (u_{3p+1}) et (u_{3p+2}) .
- Soit (u_n) une suite telle que toute suite extraite converge vers ℓ . Alors les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers ℓ . D'après 3.3. on en déduit que (u_n) converge vers ℓ ce qui prouve la réciproque de 3.2.

Application : contre-exemple à la réciproque du théorème de Césaro, version "divergence vers $+\infty$ "

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Il est clair que (u_n) diverge (considérer les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) et utiliser 3.2.)

Montrons, cependant, que (u_n) diverge vers $+\infty$ au sens de Césaro :

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{2p} = \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{2p} u_k = \frac{1}{2p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} u_k = \frac{1}{2p} \sum_{j=1}^p u_{2j} = \frac{1}{2p} \sum_{j=1}^p 2j = \frac{p+1}{2}$$

$$v_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \sum_{k=1}^{2p+1} u_k = \frac{1}{2p+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p+1} u_k = \frac{1}{2p+1} \sum_{j=1}^p u_{2j} = \frac{1}{2p+1} \sum_{j=1}^p 2j = \frac{p(p+1)}{2p+1}$$

Les suites extraites (v_{2p}) et (v_{2p+1}) divergent toutes deux vers $+\infty$, donc la suite (v_n) aussi.

3.4. Théorème Bolzano-Weierstrass

Soit (u_n) une suite **bornée** de réels. Alors, on peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

(Variante : toute suite bornée de réels admet une valeur d'adhérence)

Démonstration :

L'idée générale :

Notons a_0 (resp. b_0) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. (Existent car (u_n) bornée)

Posons $I_0 = [a_0, b_0]$ et c_0 le centre de I_0 .

L'un, au moins, des deux intervalle $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$ contient une **infinité de termes** de la suite (x_n) . (On a bien dit une infinité de termes ; ce n'est pas forcément une infinité de valeurs)

Notons I_1 cet intervalle et c_1 son centre. On réitère le procédé ci-dessus avec le segment I_1 .

On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0. L'intersection de tous ces segments est donc un certain réel ℓ . En outre, par construction, chacun de ces segments contient au moins un terme de la suite (u_n) . On peut donc construire une suite extraite en choisissant à chaque fois l'un de ces termes et cette suite converge nécessairement vers ℓ .

Mise en forme :

Soient $a_0 = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $b_0 = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$$

Pour tous réels α et β tels que $a_0 \leq \alpha < \beta \leq b_0$, notons :

$$N(\alpha, \beta) = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha \leq u_n \leq \beta\}$$

$(N(\alpha, \beta))$ est l'ensemble des **indices** n pour lesquels $\alpha \leq u_n \leq \beta$

On sait que $N(a_0, b_0)$ est infini. Posons $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Comme $N(a_0, b_0) = N(a_0, c_0) \cup N(c_0, b_0)$, l'un, au moins, des deux ensembles $N(a_0, c_0)$ ou $N(c_0, b_0)$ est aussi infini.

Si $N(a_0, c_0)$ est infini alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

Si $N(c_0, b_0)$ est infini alors on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

Le segment $[a_1, b_1]$ ainsi construit est ainsi tel que $N(a_1, b_1)$ soit infini.

Supposons maintenant $[a_n, b_n]$ construit tel que $N(a_n, b_n)$ soit infini. Posons $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Comme $N(a_n, b_n) = N(a_n, c_n) \cup N(c_n, b_n)$, l'un, au moins, des deux ensembles $N(a_n, c_n)$ ou $N(c_n, b_n)$ est infini.

Si $N(a_n, c_n)$ est infini alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Si $N(c_n, b_n)$ est infini alors on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

On a ainsi construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés :

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons ℓ leur limite commune.

Reste à montrer qu'il existe une application σ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ .

Posons $\sigma(0) = 0$.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\sigma(n)$ égal à un indice strictement supérieur à $\sigma(n-1)$ qui est situé dans $N(a_n, b_n)$. (Il en existe nécessairement puisque $N(a_n, b_n)$ est infini : on peut, par exemple, choisir le plus petit)

La suite $(u_{\sigma(n)})$ est extraite de (u_n) et $a_n \leq u_{\sigma(n)} \leq b_n$ donc $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ .

La réciproque du théorème de Bolzano-Weierstrass est bien sûr fautive. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite extraite (u_{2p+1}) est constante (égale à 0) donc converge, cependant, (u_n) n'est pas bornée.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass admet de très nombreuses applications. Nous allons en donner quelques unes.

3.4.1 Théorème \mathbb{R} est complet

Dans \mathbb{R} , toute suite de Cauchy converge.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite de Cauchy.

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) est de Cauchy, elle est bornée (1.4.). D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous-suite convergente :

Il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\sigma(n)})$ converge vers un certain réel ℓ :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \ell| \leq \varepsilon)$$

En outre, comme (u_n) est de Cauchy :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq q \geq N_2 \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon)$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\sigma(n)}| + |u_{\sigma(n)} - \ell| \stackrel{\sigma(n) \geq n \geq N_2}{\leq} 2\varepsilon)$$

Ce qui prouve bien que (u_n) converge vers ℓ .

3.4.2. Théorème de Heine

Toute fonction numérique continue sur un segment I est uniformément continue sur ce segment I .

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné.

Démonstration :

Soit f une fonction continue sur I .

Supposons f non uniformément continue sur I .

Alors : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists (x; y) \in I^2 \text{ tel que : } (|x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

En particulier, en choisissant $\eta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n; y_n) \in I^2 \text{ tel que : } (|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon) \quad (1)$$

Comme I est borné, les suites (x_n) et (y_n) ainsi définies le sont également.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire des sous-suites qui convergent.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que la suite $(x_{\sigma(n)})$ converge.

Notons ℓ sa limite. (On a nécessairement $\ell \in I$ puisque I est fermé).

Fixons $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2})$$

Mais, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (1) :

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| < \frac{1}{\sigma(n)}$$

Comme $\frac{1}{\sigma(n)}$ tend vers 0, on a :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow \left| \frac{1}{\sigma(n)} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2})$$

Pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a alors :

$$|y_{\sigma(n)} - \ell| \leq |y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \leq \varepsilon'$$

Ceci prouve que la suite $(y_{\sigma(n)})$ converge également vers ℓ .

Or, f étant continue sur I , on peut affirmer que les suites $(f(x_{\sigma(n)}))$ et $(f(y_{\sigma(n)}))$ convergent vers $f(\ell)$.

Donc : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})| < \varepsilon)$

Ce qui contredit (1).

Conclusion : f est uniformément continue sur le segment I .

3.4.3. Théorème

Une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ

Démonstration :

Par l'absurde.

Soit (u_n) une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence ℓ .

Supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

Alors l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est infini.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ strictement croissante. (Existe car A est une partie infinie de \mathbb{N})

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(n)} - \ell| > \varepsilon$

Comme la suite $(u_{\sigma(n)})$ est bornée (car extraite de (u_n) qui l'est), on peut (Bolzano-Weierstrass) en extraire une sous-suite convergente :

Il existe $\sigma' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\sigma \circ \sigma'(n)})$ converge vers un certain réel ℓ'

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma \circ \sigma'(n)} - \ell| > \varepsilon$

Et par passage à la limite $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$

Donc $\ell' \neq \ell$. La suite (u_n) aurait alors deux valeurs d'adhérences distinctes. Contradiction.

Donc (u_n) converge vers ℓ .

4. Quelques applications

4.1. Théorème *Fonction continue sur un segment*

Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors f est **bornée sur I** et f **atteint ses bornes**.

C'est une application du théorème des segments emboîtés et du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Démonstration :

1. Montrons : f bornée sur I

Supposons f non **bornée** sur I .

Soit c le milieu de I .

Posons $a_1 = a$ et $b_1 = c$ si f non bornée sur $[a, c]$.

Posons $a_1 = c$ et $b_1 = b$ sinon.

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Sur chacun de ces intervalles, f est, par construction, non bornée.

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons x_0 leur limite commune.

Comme f est continue en x_0 , on a (avec $\varepsilon = 1$) :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1)$$

C'est-à-dire : $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1)$

Donc f est bornée sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Comme les segments $[a_n, b_n]$ ont des longueurs qui tendent vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : (n \geq N \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon)$$

Donc, pour un certain N , les segments $[a_n, b_n]$, $n \geq N$, sont contenus dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Or, f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$ d'où une contradiction.

Donc f est bornée sur I .

2. Montrons : f atteint ses bornes

On vient de voir que f est bornée sur I . Notons $M = \sup_I f$ et $m = \inf_I f$.

Montrons qu'il existe x_0 dans I tel que $f(x_0) = M$.

Comme M est la borne supérieure de f sur I :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$: $\exists x_n \in I : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

La suite $(f(x_n))$ converge donc vers M .

En outre, la suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous suite qui converge vers un certain réel x_0 . Notons $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que $(x_{\sigma(n)})$ converge vers x_0 .

La fonction f étant continue en x_0 , on a : $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\sigma(n)}) = f(x_0)$.

Donc f atteint son maximum.

On démontre, de même, que f atteint son minimum.

4.2. Théorème *Théorème spécial à certaines séries dites alternées*

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série vérifiant les conditions suivantes :

- i) (u_n) est à signes alternés : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|)$
- ii) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0
- iii) la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Alors dans ces conditions :

la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et le reste $R_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$ vérifie : $\text{sgn}(R_n) = \text{sgn}(u_{n+1})$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

Démonstration :

Posons :
$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$

(Le cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ est analogue)

Considérons les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_n = S_{2n+1} \quad \text{et} \quad b_n = S_{2n}$$

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 0$

La suite (a_n) est croissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n \leq 0$

La suite (b_n) est décroissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Notons S leur limite commune. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, on déduit :

$$u_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$, on déduit :

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2}$$

On a donc :

$$(*) \begin{cases} u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0 \\ 0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2} \end{cases}$$

Ceci prouve déjà :

$$\operatorname{sgn}(R_{2n}) = \operatorname{sgn}(u_{2n+1}) = \text{négatif}$$

$$\operatorname{sgn}(R_{2n+1}) = \operatorname{sgn}(u_{2n+2}) = \text{positif}$$

On peut donc affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}(u_{n+1})$$

De plus, en passant aux valeurs absolues dans $(*)$, il vient :

$$\begin{cases} 0 \leq |R_{2n}| \leq |u_{2n+1}| \\ 0 \leq |R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}| \end{cases}$$

On peut donc affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |u_{n+1}|$$