

## THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINÉAIRE D'ORDRE 1

### Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1

Soient :

- $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point.
- $p \in \mathbb{N}^*$
- $A \in C(I, M_p(\mathbb{K}))$   
( $A$  est représentée par une matrice carrée dont les coefficients sont des applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ ),
- $B \in C(I, \mathbb{K}^p)$   
( $B$  est représentée par un vecteur colonne dont les coefficients sont des applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ ).
- $t_0 \in I$  et  $Y_0 \in \mathbb{K}^p$ .

Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :

$$Y' = AY + B \text{ et } Y(t_0) = Y_0$$

On parle d'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre (ou de système différentiel linéaire du premier ordre) défini(e) par une condition initiale.

### Démonstration :

Déjà, remarquons qu'une application  $Y$  (de  $I$  dans  $\mathbb{K}^p$ ) vérifiant  $Y' = AY + B$  est nécessairement de classe  $C^1$  (car  $A$  et  $B$  sont continues)

On commence par transformer l'équation vectorielle en une équation intégrale.

Si  $Y$  est une solution du problème de Cauchy, alors pour tout  $t \in I$ , en intégrant l'équation  $Y'(u) = A(u)Y(u) + B(u)$  pour  $u$  allant de  $t_0$  à  $t$ , on obtient :

$$\forall t \in I, Y(t) - Y(t_0) = \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u) du$$

Et tenant compte de la condition initiale  $Y(t_0) = Y_0$  :

$$\forall t \in I, Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u) du$$

Réciproquement, toute application  $Y$  de classe  $C^1$  vérifiant l'équation ci-dessus est solution du problème du Cauchy.

On a donc l'équivalence :

$$(Y' = AY + B \text{ et } Y(t_0) = Y_0) \Leftrightarrow Y = Y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u) du$$

### **On suppose que $I$ est un segment $[a, b]$**

Notons  $E = C(I, \mathbb{K}^p)$ . ( $E$  est l'espace vectoriel des applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}^p$ )

On rappelle que  $E$  muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

En effet, comme  $I$  est un segment, les éléments de  $E$  sont des applications **bornées**. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy d'éléments de  $E$ . Alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon)$$

Pour un tel rang  $N$ , on a alors :

$$\forall x \in I, (p \geq q \geq N \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\|_\infty \leq \varepsilon)$$

La suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy dans  $\mathbb{K}^p$  complet donc converge vers un élément  $f(x) \in \mathbb{K}^p$ .

On définit ainsi une application  $f \in C(I, \mathbb{K}^p)$ .

$f$  est bien continue car limite uniforme d'applications continues puisque en faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$ , on a :

$$\|f - f_p\|_\infty \leq \varepsilon$$

De plus,  $f$  est bornée puisque :  $\|f\|_\infty \leq \|f - f_p\|_\infty + \|f_p\|_\infty$

On a bien prouvé que  $E$  est **complet**. C'est donc un espace de Banach.

Revenons à la démonstration du théorème de Cauchy-Lipchitz.

On considère l'application :

$$\Phi : E \rightarrow E$$

$$F \mapsto \Phi(F) : I \rightarrow \mathbb{K}^p$$

$$t \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^t A(u)F(u) + B(u) du$$

Pour intégrer un vecteur, on intègre chaque coordonnée.

( $\Phi$  est bien définie puisque  $\Phi(F)$  est continue (car dérivable) sur  $I$ )

Montrons que  $\Phi$  admet un unique point fixe.

Soient  $F$  et  $G$  deux éléments de  $E$  :

$$\Phi(F)(t) - \Phi(G)(t) = \int_{t_0}^t A(u)(F(u) - G(u)) du$$

D'où :

$$\|\Phi(F)(t) - \Phi(G)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(u)(F(u) - G(u))\| du \right|$$

Comme  $M_p(\mathbb{K})$  est de dimension finie, les normes d'applications linéaires sont continues, donc :

$$\|A(u)(F(u) - G(u))\| \leq \|A(u)\| \|F(u) - G(u)\|$$

Or,  $A(u) \in M_p(\mathbb{K})$ , donc en notant  $A(u) = (a_{ij}(u))$ , on a :  $\|A(u)\| = \max_{i,j} |a_{ij}(u)| \leq \max_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty$ .

En posant  $k = \max_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty$ , on obtient :  $\|\Phi(F)(t) - \Phi(G)(t)\| \leq k |t - t_0| \|F - G\|_\infty$

Montrons par récurrence la propriété :

$$\wp(n) : \|\Phi^n(F)(t) - \Phi^n(G)(t)\| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} \|F - G\|_\infty$$

On vient de voir que l'on a  $\wp(1)$ .

Supposons  $\wp(n)$ , alors :

$$\|\Phi^{n+1}(F)(t) - \Phi^{n+1}(G)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(u)(\Phi^n(F)(u) - \Phi^n(G)(u))\| du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t k \frac{k^n |u - t_0|^n}{n!} \|F - G\|_\infty du \right|$$

$$\|\Phi^{n+1}(F)(t) - \Phi^{n+1}(G)(t)\| \leq \frac{k^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|F - G\|_\infty$$

Ce qui est  $\wp(n+1)$ . Du principe de récurrence, on déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\wp(n)$ .

En passant à la borne supérieure pour  $t \in [a, b]$ , on obtient :

$$\|\Phi^n(F) - \Phi^n(G)\|_\infty \leq \frac{k^n |b - a|^n}{n!} \|F - G\|_\infty$$

Comme la quantité  $\frac{k^n |b - a|^n}{n!}$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, il existe un entier  $N$  pour lequel :

$$\frac{k^N |b - a|^N}{N!} \leq 1$$

En conséquence,  $\Phi^N$  est **contractante**.

Comme  $E$  est **complet** (et **fermé**), le **théorème du point fixe** permet d'affirmer que  $\Phi^N$  admet un unique point fixe  $Y \in E$ .

On a alors :

$$\Phi^N(\Phi(Y)) = \Phi(\Phi^N(Y)) = \Phi(Y)$$

Par unicité du point fixe de  $\Phi^N$ , on en déduit :  $\Phi(Y) = Y$

Donc  $\Phi$  admet un point fixe  $Y$ .

Si  $Z$  était un autre point fixe de  $\Phi$  alors  $Z$  serait point fixe de  $\Phi^N$  et donc  $Z = Y$ .

En conséquence,  $\Phi$  admet un unique point fixe  $Y$ .

Il existe donc un unique  $Y$  tel que  $Y = Y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u) du$ , ce qui démontre le théorème de Cauchy-

Lipschitz linéaire d'ordre 1 sur un segment.

**On suppose maintenant que  $I$  est un intervalle quelconque (non vide et non réduit à un point)**

On construit alors une suite croissante de segments  $[a_n, b_n]$  contenant  $t_0$  dont la réunion est  $I$ .

D'après ce qui précède, il existe une unique solution  $Y_n$  au problème de Cauchy sur  $[a_n, b_n]$ .

Et par unicité, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la restriction de  $Y_{n+1}$  à  $[a_n, b_n]$  coïncide avec  $Y_n$ .

On définit alors :

$$Y(t) = Y_n(t) \text{ si } t \in [a_n, b_n]$$

On a ainsi construit une solution du problème de Cauchy sur  $I$ .

Reste à prouver l'unicité : soit  $Z$  une autre solution du problème de Cauchy sur  $I$ , alors il existe un réel  $t_1 \in I$  tel que  $Z(t_1) \neq Y(t_1)$ , ce qui contredit le théorème de Cauchy-Lipschitz sur un segment contenant  $t_1$ .