

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X]$ annihilant f qui est scindé et à racines simples.

Applications :

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est diagonalisable.

b. Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow A^p$ est diagonalisable

Démonstration :

Supposons f diagonalisable.

Alors E admet une base (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres.

Notons : $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ ($p \leq n$) les p valeurs propres de f deux à deux distinctes

Posons :
$$P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$$

Ce polynôme est scindé à racines simples. Montrons que $P(f) = 0$.

On a :
$$P(f) = \prod_{i=1}^p (f - \lambda_i Id)$$

Vérifions que $P(f)$ s'annule en chacun des vecteurs propres. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$P(f)(e_k) = \prod_{i=1}^p (f - \lambda_i Id)(e_k)$$

La notation $\prod_{i=1}^p (f - \lambda_i Id)$ prend ici un sens car les endomorphismes $f - \lambda_i Id$ commutent.

Notons λ_j (pour un certain $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$) la valeur propre correspondant à e_k .

Comme les endomorphismes $(f - \lambda_i Id)$ commutent (puisque ce sont des polynômes construits avec le même endomorphisme f), on peut écrire :

$$P(f)(e_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (f - \lambda_i Id) \circ (f - \lambda_j Id)(e_k)$$

Et comme $(f - \lambda_j Id)(e_k) = 0$, on en déduit :

$$P(f)(e_k) = 0$$

$P(f)$ est un endomorphisme qui s'annule sur tous les vecteurs d'une base, c'est donc l'endomorphisme nul :

$$P(f) = 0$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme P scindé, à racines simples, tel que $P(f) = 0$.

Notons le :
$$P = a \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \quad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts 2 à 2 et } a \in \mathbb{K}^*$$

Quitte à diviser P par un certain scalaire, on peut supposer $a = 1$. Cela ne changera pas nos hypothèses sur P .

Posons, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$P_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (X - \lambda_i)$$

Il est clair que $P_j(X - \lambda_j) = P$ et que les polynômes P_1, \dots, P_p sont premiers entre eux dans leur ensemble (il n'ont aucun diviseur commun).

D'après le théorème de Bézout :

$$\exists U_1, \dots, U_p \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } \sum_{i=1}^p U_i P_i = 1$$

En passant aux endomorphismes :

$$\sum_{i=1}^p (U_i P_i)(f) = Id$$

Soit maintenant $x \in E$. On a donc :

$$x = \sum_{i=1}^p (U_i P_i)(f)(x)$$

Notons :

$$x_i = (U_i P_i)(f)(x) = U_i(f) \circ P_i(f)(x)$$

On a alors, P étant annulateur de f :

$$(f - \lambda_i Id)(x_i) = U_i(f) \circ P(f)(x) = U_i(f)(0) = 0$$

Autrement dit :

$$x_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i Id)$$

Or :

$$\text{Ker}(f - \lambda_i Id) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \lambda_i \notin \text{Sp}(f) \\ \text{SEP}(f, \lambda_i) & \text{si } \lambda_i \in \text{Sp}(f) \end{cases}$$

Bilan : chaque vecteur x de E s'écrit comme une somme de vecteurs qui sont soit nuls soit dans des sous-espaces propres de f . Comme on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe, on a, après réindexation :

$$E = \bigoplus_{i=1}^q \text{SEP}(f, \lambda_i)$$

Ce qui prouve que f est diagonalisable.

Application :

a. Soit $B(e_1, \dots, e_n)$ une base et f l'endomorphisme tel que $A = \text{mat}_B(f)$

On constate que :

$$f(e_1) = e_n$$

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket f(e_k) = e_{k-1}$$

On en déduit facilement que :

$$f^n = Id$$

Autrement dit, le polynôme $P = X^n - 1$ est annulateur pour f et donc pour A .

Et comme il est scindé, à racines simples sur \mathbb{C} (ses racines sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité), on en déduit que f , et donc A est bien diagonalisable.

b. \Rightarrow : supposons A diagonalisable.

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } A = P D P^{-1} \text{ où } D \text{ est une matrice diagonale.}$$

On a alors : $A^p = P D^p P^{-1}$ où D^p est une matrice diagonale.

Donc A^p est diagonalisable.

\Leftarrow : supposons A^p diagonalisable.

Alors, il existe un polynôme annulateur de A^p qui est scindé et à racines simples.

Le polynôme minimal $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$ vérifie ces conditions.

Or, A étant inversible, A^p l'est également. Donc les valeurs propres de A^p sont non nulles.

Donc : $(A^p - \lambda_1 I) \dots (A^p - \lambda_r I) = 0$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \underline{\mathbb{C}}^*$ sont distincts

Dans \mathbb{C} , chacune des équations $X^p - \lambda_k = 0$, ($1 \leq k \leq r$) admet exactement p racines $\lambda_{k,j}$ (car $\lambda_k \neq 0$).

Les nombres $\lambda_{k,j}$ sont distincts deux à deux. (En effet, $\lambda_{k,j} = \lambda_{k',j'} \Rightarrow \lambda_{k,j}^p = \lambda_{k',j'}^p \Rightarrow \lambda_k = \lambda_{k'}$)

Il existe donc un polynôme annulateur de A qui est scindé et à racines simples :

$$\prod_{k=1}^r \prod_{j=1}^p (A - \lambda_{k,j} I) = 0$$

Et par suite, A est diagonalisable.