INTÉGRALES DE WALLIS ET FORMULE DE STIRLING

1. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ \ \mathrm{d}t$. (Intégrales de Wallis)
   a) Calculer explicitement I_{2p} et I_{2p+1}.
   b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$.
   c) Démontrer que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
   d) Démontrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\mathbf{e}}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) On pose $v_n = \ln(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant $v_{n+1} - v_n$, démontrer que la série de terme général v_n converge. En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine limite ℓ.
   b) À l'aide de la question 1)d), démontrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$.
   c) En déduire la formule de Stirling : $n\,! \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

1. a) On a immédiatement : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par IPP : ($u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t = \Big[(\cos t)^{n+1} \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\left(\text{Variante : } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout } n \geqslant 2\right)$$

On en déduit immédiatement : $I_2 = \dfrac{1}{2} I_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_3 = \dfrac{2}{3} I_1 = \dfrac{2}{3}$; $I_4 = \dfrac{3}{4} I_2 = \dfrac{3\pi}{16}$

Formule générale :

Si n pair ($n = 2p$) $$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{C_{2p}^p \pi}{2^{2p+1}}$$

Si n impair ($n = 2p + 1$) $$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$

En intégrant pour t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$: $\quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

En conséquence, la suite (I_n) est décroissante.

On a donc : $\quad 0 \leqslant I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

Et comme $I_{n+2} > 0$: $\quad 1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$

c) On a vu que : $\quad \dfrac{I_n}{I_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1} \quad (1)$

D'où : $\quad 1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}$

Par encadrement, on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$ admet une limite égale à 1 en $+\infty$.

Autrement dit : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1} \quad (2)$

d) Montrons enfin que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante :

$$u_{n+1} = (n+2)\, I_{n+1}\, I_{n+2} \overset{(1)}{=} (n+1)\, I_n\, I_{n+1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc bien constante. Et comme $u_0 = I_0\, I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

En multipliant l'équivalent (2) par $(n+1)I_n$:

$$(n+1)\, I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

D'où : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

On retiendra ce résultat très utile :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2. a) Il est clair que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} \times \mathbf{e} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) = \ln\left(\mathbf{e} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or, on sait que : $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. Donc la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ également.

Il en va donc donc de même de la suite (v_n) et donc de la suite (u_n).

Et comme $u_n = \mathbf{e}^{v_n}$, la suite (u_n) converge vers un certain réel $\ell > 0$. (Puisque (v_n) converge)

b) On a donc : $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$$

C'est-à-dire : $$n! \underset{+\infty}{\sim} \ell \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{n}$$

On détermine ℓ à l'aide d'un équivalent connu dans lequel intervient des factorielles, comme par exemple l'équivalent des intégrales de Stirling :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

On a vu les deux résultats suivants :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

En conséquence : $$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell \, (2n)^{2n} \mathbf{e}^{-2n} \sqrt{2n}}{2^{2n}(\ell \, n^n \mathbf{e}^{-n} \sqrt{n})^2} \frac{\pi}{2}$$

D'où $$\ell \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

Et par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$\ell = \sqrt{2\pi}$$

Conclusion : $$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$