

FORMULE DES CLASSES, p -groupes

Soit G un groupe fini.

On appelle centre de G l'ensemble : $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$

1. Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G .

2. On fait opérer G sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x = gxg^{-1} \end{aligned}$$

On note pour tout x de G : $S_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ (stabilisateur de x)

Démontrer la formule des classes suivante :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(Z(G)) + \sum_{x \in I'} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(S_x)}$$

Où I' est une partie de G contenant exactement un représentant non central de chaque classe de conjugaison.

3. Applications aux p -groupes. (Groupes d'ordre p^α , où p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$)

- a) Démontrer que le centre d'un p -groupe est non trivial. (C'est-à-dire non réduit à l'élément neutre)
- b) Démontrer que pour $\alpha = 2$ les p -groupes sont abéliens.

1. On peut le prouver "à la main" ou de la manière savante suivante :

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad i : G &\rightarrow \text{Aut}(G) \\ g &\mapsto i_g : G \rightarrow G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

On vérifie que i est un morphisme de groupe dont le noyau est $Z(G)$, ce qui prouve le résultat.

2. Puisque les orbites sous G forment une partition de X , on a :

$$\text{Card}(X) = \sum_{x \in I} \text{Card}(G \cdot x)$$

Où I est une partie de G contenant exactement un représentant de chaque orbite.

En outre, on sait que : G/S_x et $\text{Orb}_G(x)$ sont **isomorphes**

(Il suffit pour prouver cela de factoriser l'application d'orbite $g \mapsto g \cdot x$ via son noyau qui est S_x)

$$\text{Donc :} \quad \text{Card}(G \cdot x) = \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(S_x)}$$

$$\text{D'où :} \quad \text{Card}(X) = \sum_{x \in I} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(S_x)} \quad (\text{Formule des classes})$$

Dans le cas où G opère sur lui-même par conjugaison, chaque élément x du centre $Z(G)$ définit une orbite réduite à lui-même :

$$\text{En effet, rappelons que : } \text{Orb}_G(x) = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

$$\text{On a donc :} \quad x \in Z(G) \Leftrightarrow \text{Orb}_G(x) = \{x\}$$

La formule des classes devient, en posant $I = I' \cup Z(G)$:

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(Z(G)) + \sum_{x \in I'} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(S_x)}$$

Où I' est une partie de G contenant exactement un représentant non central de chaque classe de conjugaison.

3. D'après le théorème de Lagrange, pour tout $x \in G$, $\text{Card}(S_x)$ divise $\text{Card}(G) = p^\alpha$.

Or, si x est non central (et donc $x \neq 1$), alors $\text{Card}(S_x) > 1$ donc $\text{Card}(S_x) = p^\beta$ avec $1 \leq \beta \leq \alpha$.

Par ailleurs :

$$x \in Z(G) \Leftrightarrow \forall y \in G, xy = yx \Leftrightarrow \forall y \in G, x = yxy^{-1} \Leftrightarrow \forall y \in G, x = y \cdot x \Leftrightarrow \forall y \in G, y \in S_x \Leftrightarrow S_x = G$$

Mais comme x est non central, S_x est un sous-groupe propre de G (contraposée de $x \in Z(G) \Leftrightarrow G = S_x$)

Donc :
$$1 \leq \beta < \alpha$$

D'où :
$$\frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(S_x)} = 0 [p]$$

On a donc :
$$\text{Card}(Z(G)) = \text{Card}(G) [p] = 0 [p]$$

Or, $\text{Card}(Z(G)) \geq 1$, (car $Z(G)$ contient au moins le neutre), donc :

$$\text{Card}(Z(G)) = p^\gamma \text{ avec } \gamma \geq 1$$

Ce qui prouve a).

Lorsque $\alpha = 2$, le raisonnement ci-dessus montre que :

$$\text{Card}(Z(G)) = p \text{ ou } p^2$$

Supposons $\text{Card}(Z(G)) = p$. Il existe alors $x \in G \setminus Z(G)$.

Mais, on a facilement :
$$S_x = Z_G(x)$$

Or, $x \in S_x = Z_G(x)$ et $Z(G) \subset Z_G(x)$.

Donc $\text{Card}(Z_G(x)) \geq \text{Card}(Z(G))$.

Mais comme $x \in Z_G(x) \setminus Z(G)$.

On a : $\text{Card}(Z_G(x)) \geq p + 1$.

Donc, d'après le théorème de Lagrange : $\text{Card}(Z_G(x)) = p^2$.

Donc $Z_G(x) = G$ et par suite $x \in Z(G)$. Contradiction.

Donc $\text{Card}(Z(G)) = p^2$ et donc G est abélien d'où b).

Remarque : cela ne fonctionnerait pas avec un groupe d'ordre p^3 .

