GROUPE DIÉDRAL

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On se propose de déterminer l'ensemble G des isométries (du plan) préservant les sommets d'un n-gone.

Soient O le centre du n-gone, A_0 l'un de ses sommets et g un élément de G.

On note $A_0, A_1, \dots A_{n-1}$ les sommets du n-gone, dans cet ordre.

On note s la symétrie d'axe (OA_0) et r_i la rotation de centre O qui envoie A_0 en A_i. $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$

1. Démontrer que G est un groupe dont l'ordre divise $n!$.
2. a) On suppose dans cette question de $g(A_0) = A_0$. Que peut-on dire de g ?

   b) On suppose dans cette question de $g(A_0) = A_i$. $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$

   Démontrer que : $g = r_i$ ou $g = r_i \circ s$

   c) En déduire que : $G = \langle r, s \rangle$ où $r = r_1$

   Préciser l'ordre de G.
3. Compositions d'éléments de G :

   a) Démontrer que : $s \circ r \circ s \circ r = Id$

   b) Démontrer que : $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]^2,\ (r^i \circ s) \circ (r^j \circ s) = r^{i-j}$

1) Il est clair que G est un sous-groupe du groupe symétrique S_n. D'après le théorème de Lagrange, on peut affirmer que l'ordre de G divise n !

2) a) g possède dèjà deux points fixes. Il y a évidemment A_0. Mais également O. En effet, comme g est affine, elle conserve le barycentre d'une famille de points. Donc $g(O) = O$.

   (Car O est l'isobarycentre de $A_0, A_1, \dots A_{n-1}$)

   En conséquence, g fixe la droite (A_0O). (Puisque cette droite est l'ensemble des barycentres de A_0 et O)

   On en déduit : $g = s$ ou $g = Id$

   b) On a : $r_i^{-1} \circ g(A_0) = r_i^{-1}(A_i) = A_0$.

   Et d'après a) : $r_i^{-1} \circ g = s$ ou $r_i^{-1} \circ g = Id$

   D'où : $g = r_i \circ s$ ou $g = r_i$

   De plus, ces deux isométries sont bien distinctes puisque l'on a, par exemple :

$$r_i \circ s(A_1) = r_i(A_{n-1}) = A_{i-1\,[n]} \text{ et } r_i(A_1) = A_{i+1\,[n]}$$

   Or, $i-1 = i+1\ [n]$ entraîne, $2 = 0\ [n]$ ce qui est exclu car $n \geqslant 3$. Donc $r_i \circ s(A_1) \neq r_i(A_1)$.

   c) D'après les questions a) et b), on a examiné toutes les possibilités de transformation du point A_0.

   (À chaque image possible de A_0 correspond deux isométries distinctes).

   On a la liste des isométries suivantes :

$$Id, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_1 \circ s, r_2 \circ s, \dots, r_{n-1} \circ s$$

   En notant $r = r_1$, on a bien : $G = \langle r, s \rangle$

   L'ordre de G est $2n$. (Et : $|\langle r \rangle| = n$, $|\langle s \rangle| = 2$)

3) a) $r \circ s \circ r(A_0) = r \circ s(A_1) = r(A_{n-1}) = A_0$.

   Donc, d'après 2)a) : $r \circ s \circ r = Id$ ou $r \circ s \circ r = s$

Or : $r \circ s \circ r(A_1) = r \circ s(A_2) = r(A_{n-2}) = A_{n-1}$. Donc $r \circ s \circ r \neq Id$.

D'où : $$r \circ s \circ r = s$$

$$s \circ r \circ s \circ r = Id$$

(On a aussi : $r \circ s \circ r \circ s = Id$)

b) Utilisons $r \circ s = s \circ r^{-1}$. (D'après 3)a))

$$(r^i \circ s) \circ (r^j \circ s) = r^i \circ s \circ \underbrace{r \circ \ldots \circ r}_{j \ \ fois} \circ s = r^i \circ s \circ s \circ r^{-j} = r^{i-j}$$

Illustration des axes de symétries dans les cas impairs et pairs :