

FORMULE DE GRASSMANN

F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E .

On considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi : F \times G &\rightarrow E & \psi : F \cap G &\rightarrow F \times G \\ (f, g) &\mapsto f + g & f &\mapsto (f, -f) \end{aligned}$$

1. Démontrer que $\text{Ker } \varphi \cong F \cap G$.
2. En déduire une démonstration de la relation :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

1. $\text{Ker } \varphi = \{(f, g) \in E \times F \text{ tels que } f + g = 0\} = \text{Im } \psi$

De plus ψ est injective, donc induit un isomorphisme sur son image. Donc $\text{Ker } \varphi \cong F \cap G$.

2. En outre, $\text{Im } \varphi = F + G$.

Appliquons le théorème du rang à φ , il vient :

$$\dim(F \times G) = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim(F \cap G) + \dim(F + G).$$

Et comme $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on obtient la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Remarque : autre démonstration

On sait que $F \cap G$ admet au moins un supplémentaire dans F .

Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F : $F = F' \oplus (F \cap G)$

On a, par conséquent : $\dim F' = \dim F - \dim(F \cap G)$ (1)

Montrons que : $F + G = F' \oplus G$

D'une part, comme $F \cap G \subset G$: $F + G = F' + (F \cap G) + G = F' + G$

D'autre part : $F' \cap G \stackrel{F' \subset F}{=} F' \cap F \cap G \stackrel{F = F' \oplus (F \cap G)}{=} \{0\}$

On a donc bien : $F + G = F' \oplus G$

On en déduit : $\dim F' = \dim(F + G) - \dim G$ (2)

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Idée de la démonstration :

Considérer un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F .
Puis vérifier que F' est de dimension "convenable"