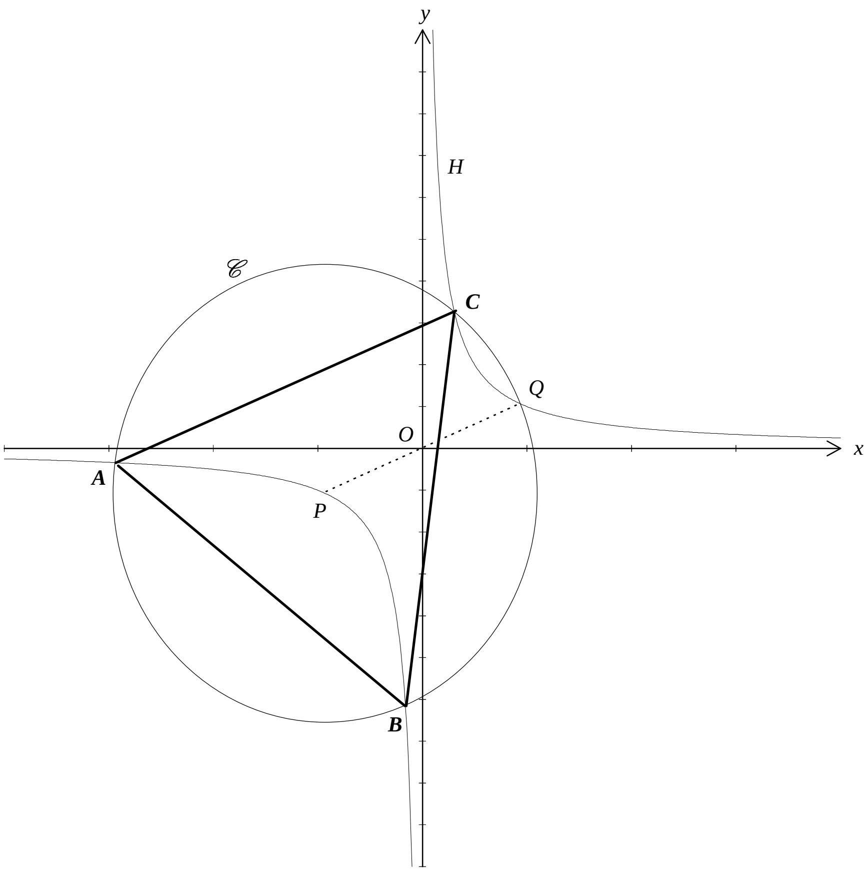
PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Dans le plan affine muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'hyperbole équilatère H d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.
Soient P un point de H, Q le symétrique de P par rapport à O et $\mathscr{C}$ le cercle de centre P et de rayon $[PQ]$.
On note A et B les deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la branche de H portant P.
On note C le deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la branche de H portant Q. (Éventuellement, $C = Q$)
Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.



Notons $\left(p\ ;\ \dfrac{1}{p}\right)$ les coordonnées de P. Celles de Q sont donc $\left(-p\ ; -\dfrac{1}{p}\right)$.
L'équation du cercle $\mathscr{C}$ est :

$$(x-p)^2 + \left(y - \frac{1}{p}\right)^2 = PQ^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

Soit $M(x, y)$ un point de $H \cap \mathscr{C}$. Alors $x \neq 0$ et vérifie :

$$(x-p)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{p}\right)^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

(Équation aux abscisses)

En multipliant par x^2 :

$$x^2(x^2 - 2px + p^2) + 1 - \frac{2}{p}x + \frac{1}{p^2} = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)x^2$$

On sait déjà que $-p$ est un racine de cette équation. Notons x_A, x_B, x_C les trois autres racines.
D'après les relations entre les coefficients et les racines, on sait que $x_A + x_B + x_C - p$ est égal à l'opposé du coefficient de x^3 :

$$x_A + x_B + x_C - p = 2p$$

D'où :

$$\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = p$$

On montre, de même, en considérant l'équation aux ordonnées :

$$\left(\frac{1}{y} - p\right)^2 + \left(y - \frac{1}{p}\right)^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

que l'on a :

$$\frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{p}$$

Ce qui prouve : *P* est le centre de gravité du triangle *ABC*

Par ailleurs, *P* étant le centre du cercle circonscrit à *ABC*, médianes et médiatrices sont confondues.

Donc *ABC* est équilatéral.