

## LIEN HYPERPLAN - FORME LINÉAIRE

Soit  $E$  un e.v. de dimension quelconque (éventuellement infinie)

### Définition Hyperplan

On appelle hyperplan tout s.e.v. de  $E$  supplémentaire d'une droite vectorielle.

### Théorème Caractérisation d'un hyperplan

$$H \text{ hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}, H = \text{Ker } \varphi$$

Autrement dit :  $H$  est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle

### Démonstration :

$\Rightarrow$  : Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  :  $E = H \oplus \mathbb{K}a$  où  $a \in E \setminus \{0\}$

Soit  $u$  un isomorphisme de  $\mathbb{K}a$  dans  $\mathbb{K}$ . (Par exemple  $u : ta \mapsto t$ )

Soit  $p$  la projection de  $E$  sur  $\mathbb{K}a$  parallèlement à  $H$ . (On a donc  $p_H = 0$  et  $p_{\mathbb{K}a} = \text{Id}$ )

Soit  $\varphi = u \circ p$ .  $\varphi$  est clairement une forme linéaire et

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in E \mid u \circ p(x) = 0\}$$

Or,  $u$  injectif donc :  $\text{Ker } \varphi = \{x \in E \mid p(x) = 0\} = \text{Ker } p = H$

$\Leftarrow$  : Supposons  $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}, H = \text{Ker } \varphi$

Comme  $\varphi$  est non nulle :  $\exists a \in E \setminus \text{Ker } \varphi$

On a donc :  $\mathbb{K}a \cap \text{Ker } \varphi = \{0\}$

Montrons que la somme  $\mathbb{K}a + \text{Ker } \varphi$  est égale à  $E$ . Soit  $x \in E$ .

Comme  $\varphi(x) \in \mathbb{K}$  et  $\varphi(a) \in \mathbb{K}^*$  (puisque  $a \in E \setminus \text{Ker } \varphi$ ), il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\varphi(x) = \lambda \varphi(a)$$

Écrivons :  $x = (x - \lambda a) + \lambda a$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$

On a  $\varphi(x - \lambda a) = \varphi(x) - \lambda \varphi(a) = 0$  donc  $x - \lambda a \in \text{Ker } \varphi$  et  $\lambda a \in \mathbb{K}a$

Donc :  $E = \text{Ker } \varphi + \mathbb{K}a$

Bilan : on a  $\mathbb{K}a \cap \text{Ker } \varphi = \{0\}$  et  $E = \text{Ker } \varphi + \mathbb{K}a$  donc :  $E = \text{Ker } \varphi \oplus \mathbb{K}a$

Donc  $H = \text{Ker } \varphi$  est supplémentaire d'une droite vectorielle, c'est donc bien un hyperplan.

Idée de la démonstration :  
Composer la projection  $p$  de  $E$  sur  $\mathbb{K}a$  parallèlement à  $H$  avec un isomorphisme  $u$  de  $\mathbb{K}a$  dans  $\mathbb{K}$ . On vérifie alors que la forme linéaire obtenue a pour noyau  $H$ .

Pour la réciproque :  
Comme la forme linéaire est non nulle, il existe un élément de  $E$  qui n'est pas dans le noyau. On montre alors que la droite vectorielle engendrée par cet élément est un supplémentaire du noyau.