

## THÉORÈME DE LUCAS

### Théorème

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

L'ensemble des zéros de  $P'$  est inclus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de  $P$ .

### Démonstration :

D'après le théorème de D'Alembert,  $P$  est scindé. On peut donc écrire :

$$P = a \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) sont les  $k$  racines complexes de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m_i \in \mathbb{N}^*$  respectivement.

En dérivant  $P$ , on obtient :

$$P' = a \sum_{i=1}^k m_i (X - \lambda_i)^{m_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (X - \lambda_j)^{m_j}$$

On identifie  $P$  et sa fonction polynôme correspondante (possible car  $\mathbb{C}$  est un corps infini).

On a alors pour  $X \notin \{\lambda_i, 1 \leq i \leq k\}$  :

$$P' = P \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{X - \lambda_i}$$

Soit  $\mu$  un zéro de  $P'$ .

1. Si  $\mu$  est un zéro de  $P$ , c'est fini.
2. Supposons  $\mu \notin \{\lambda_i, 1 \leq i \leq k\}$ . Alors :

$$0 = \frac{P'(\mu)}{P(\mu)} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\mu - \lambda_i}$$

En conjuguant :

$$\sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\overline{\mu - \lambda_i}} = 0$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^k \frac{m_i}{(\mu - \lambda_i)^2} (\mu - \lambda_i) = 0$$

Posons, pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

$$a_i = \frac{m_i}{(\mu - \lambda_i)^2} > 0$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^k a_i (\mu - \lambda_i) = 0 \text{ avec } a_i > 0$$

Soit  $M$  l'image de  $\mu$  et  $M_i$  l'image de  $\lambda_i$  respectivement. Comme  $\mu - \lambda_i$  est l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{M_i M}$ , on a :

$$\sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{M_i M} = \vec{0}$$

Ce qui prouve que :

$$M = \text{bar}\{(M_i, a_i), 1 \leq i \leq k\}$$

Et comme les coefficients  $a_i$  sont positifs :

$M$  est dans l'enveloppe convexe des  $M_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )

Ce qui prouve le théorème.