THÉOREME DES NOYAUX

Théorème **Théorème des Noyaux**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$ premiers deux à deux

Alors : $$\operatorname{Ker}((P_1 \dots P_n)(f)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(P_i(f))$$

Remarque :

$(P_1 \dots P_n)(f) = P_1(f) \circ \dots \circ P_n(f)$

(Voir ci-dessous)

Démonstration :

Remarques sur les polynômes d'endomorphismes :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On démontre que l'application

$$\varphi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$$
$$P \mapsto P(f)$$

est un morphisme d'algèbres. C'est-à-dire :

$\varphi_f(1) = \mathrm{Id}$, autrement dit $1(f) = \mathrm{Id}$

$(P + \lambda Q)(f) = P(f) + \lambda Q(f)$ et $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

Par récurrence sur n.

Étude du cas $n = 2$. Notons $P = P_1$ et $Q = P_2$.

Montrons que la somme $\operatorname{Ker}(P(f)) + \operatorname{Ker}(Q(f))$ est directe :

Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(f)) \cap \operatorname{Ker}(Q(f))$

Donc $$P(f)(x) = Q(f)(x) = 0$$

Comme les polynômes P et Q sont premiers entre eux, le théorème de Bézout dans $\mathbb{K}[X]$ permet d'affirmer :

$$\exists\, U, V \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que : } UP + VQ = 1$$

En terme d'endomorphismes, cela signifie :

$$(UP)(f) + (VQ)(f) = \mathrm{Id}$$

L'endomorphisme associé au polynôme unité 1 est Id. (Voir ci-dessus)

On a donc : $$(UP)(f)(x) + (VQ)(f)(x) = x$$

Or : $$(UP)(f)(x) = U(f) \circ P(f)(x) = U(f)(0) = 0$$

De même : $$(VQ)(f)(x) = 0$$

Donc : $$0 = x$$

Par conséquent $$\operatorname{Ker}(P(f)) \cap \operatorname{Ker}(Q(f)) = \{0\}$$

Ceci prouve : $$\operatorname{Ker}(P(f)) + \operatorname{Ker}(Q(f)) = \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f))$$

Montrons ensuite l'inclusion : $$\operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(f))$$

Soit $x_1 \in \operatorname{Ker}(P(f))$ alors : $$P(f)(x_1) = 0$$

Donc : $$Q(f) \circ P(f)(x_1) = 0$$

Des polynômes du même endomorphisme **commutent**. C'est une conséquence de $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

C'est-à-dire $$(QP)(f)(x_1) = 0$$

D'où $$(PQ)(f)(x_1) = 0$$

Donc $$x_1 \in \operatorname{Ker}((PQ)(f))$$

Soit $x_2 \in \operatorname{Ker}(Q(f))$ alors : $$Q(f)(x_2) = 0$$

Donc : $$P(f) \circ Q(f)(x_2) = 0$$

C'est-à-dire $$(PQ)(f)(x_2) = 0$$

Donc $$x_2 \in \operatorname{Ker}((QP)(f))$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f))$. Alors

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in \operatorname{Ker}(P(f)) \text{ et } x_2 \in \operatorname{Ker}(Q(f))$$

Donc x_1 et x_2 sont dans le s.e.v. $\operatorname{Ker}((QP)(f))$ donc x aussi.

On a bien : $$\operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(f))$$

Montrons enfin l'inclusion : $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) \subset \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f))$

Soit $x \in \operatorname{Ker}((PQ)(f))$. Donc : $(PQ)(f)(x) = 0$

On a vu plus haut (Bézout) qu'il existe des polynômes U et V tels que :

$$(UP)(f)(x) + (VQ)(f)(x) = x$$

Notons $y = (UP)(f)(x)$ et $z = (VQ)(f)(x)$.

On a : $Q(f)(y) = (QUP)(f)(x) = (UPQ)(f)(x) = U(f)(0) = 0$

Donc $y = \operatorname{Ker}(Q(f))$

De même $P(f)(z) = (PVQ)(f)(x) =(VPQ)(f)(x) = V(f)(0) = 0$

Donc : $z \in \operatorname{Ker}(P(f))$

Donc $x \in \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f))$

On a bien : $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) \subset \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f))$

On achève ainsi l'étude du cas $n = 2$:

$$\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f))$$

Supposons maintenant : $\operatorname{Ker}((P_1 \dots P_n)(f)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(P_i(f))$

Soit P_{n+1} tel que les polynômes $P_1, P_2, \dots , P_n$ et P_{n+1} soient premiers entre eux deux à deux.

Alors P_{n+1} est premier avec le produit $P_1 \dots P_n$. D'après le cas $n = 2$, on obtient :

$$\operatorname{Ker}(((P_1 \dots P_n)P_{n+1})(f)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(P_i(f)) \oplus \operatorname{Ker}(P_{n+1}(f))$$

C'est-à-dire : $\operatorname{Ker}((P_1 \dots P_nP_{n+1})(f)) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \operatorname{Ker}(P_i(f))$

Le principe de récurrence achève alors cette démonstration.