RÈGLE DE RAABE-DUHAMEL

Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^*\times\,]1\,;+\infty[\ \text{ tels que : } \frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

1. Si $\alpha\leqslant 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Si $\alpha>1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve :

Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$: $$v_n=n^\alpha u_n$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=1+O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\ \text{ où } \gamma=\min(2,\beta)$$

Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

C'est-à-dire : $$\exists C\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left(n\geqslant N\Rightarrow\left|\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)\right|\leqslant\frac{C}{n^\gamma}\right)$$

Or, $\gamma\in\,]1\,;+\infty[$, donc la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge absolument donc converge.

Mais, par télescopage : $$\sum_{p=1}^{n}\ln\left(\frac{v_{p+1}}{v_p}\right)=\ln(v_{n+1})-\ln(v_1)$$

Donc la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\mathbf{e}^\ell$.

Par conséquent : $$u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{K}{n^\alpha}\quad(\text{où } K=\mathbf{e}^\ell)$$

D'où le résultat cherché. (En utilisant le critère de l'équivalent avec une série de Riemann)

Remarque : si $\alpha\leqslant 0$ alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$, donc (u_n) croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc la suite (u_n) ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

Règle de Raabe-Duhamel (**variante)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists\alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Si $\boldsymbol{\alpha < 1}$ alors la série $\sum u_n$ diverge. (Inégalité stricte et non plus large...)
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Une démonstration analogue à la précédente serait vouée à l'échec. En effet, on obtiendrait la condition :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui ne permettrait pas d'affirmer la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

En effet, un terme u_n peut être égal à $o\left(\frac{1}{n}\right)$ sans être le terme d'une série convergente. (Prendre $u_n = \frac{1}{n\ln n}$)

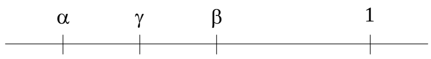
Démonstration :

Posons $$\beta = \frac{\alpha+1}{2} > 0 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^\beta}$$

On a alors : $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Supposons $\alpha < 1$:

Posons $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



On a donc : $$\alpha < \gamma < \beta < 1$$

Donc : $$1 - \frac{\alpha}{n} > 1 - \frac{\gamma}{n} > 1 - \frac{\beta}{n}$$

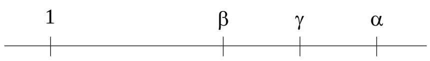
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \frac{\gamma}{n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Or, $\sum v_n$ diverge (car $\beta < 1$). Donc, d'après le critère de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ diverge.

Supposons $\alpha > 1$:

Posons $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



On a donc : $$1 < \beta < \gamma < \alpha$$

Donc : $$1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\gamma}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, on ait :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1 - \frac{\gamma}{n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Or, $\sum v_n$ converge (car $\beta > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge.

Exemples :

1) On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{2\times 4\times\ldots\times(2n)}{3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}$

On a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Mais : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.

2) On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}$

On a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Mais : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)\left(1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.