

CALCUL DE LA SOMME D'UNE SÉRIE ALTERNÉE A L'AIDE DE L'INTÉGRALE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

2. En déduire : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$

1. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = (-1)^n u_n$
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0

D'après le théorème sur les séries alternées, on en déduit la convergence de la série de terme général u_n .

Calculons, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-t^\alpha)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^\alpha)^{N+1}}{1 + t^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha} dt$$

On a donc :

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha(N+1)} dt \leq \frac{1}{\alpha(N+1)+1}$$

D'où, par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

2. Pour $\alpha = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$

Pour $\alpha = 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0 = \frac{\pi}{4}$

Pour $\alpha = 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

Considérons la fraction rationnelle :

$$F(t) = \frac{1}{1+t^3}$$

On décompose F en éléments simples :

$$F(t) = \frac{1}{1+t^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2}$$

On a :

$$A = F(t)(1+t)|_{t=-1} = -1 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tF(t) = A + B = 0 \text{ donc } B = -\frac{1}{3}$$

$$F(0) = A + C = 1 \text{ donc } C = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{1-t+t^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right)$$

En posant $u = t - \frac{1}{2}$ dans le troisième terme, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} [\ln |t^2 - t + 1|]_0^1 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 - 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arc tan} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

Les amateurs pourront encore étudier le cas $\alpha = 4$.