Théorème du supplémentaire orthogonal

Si E est préhilbertien et F est un s.e.v. de E de dimension finie alors : $F \oplus F^{\perp} = E$

Démonstration :

Idée de la démonstration : Soit $x \in E$. On décompose x en somme d'un vecteur x_F ("trace" laissée par x sur les vecteurs d'une base orthonormale de F) et du vecteur $x - x_F$ dont on montre qu'il est élément de $F^{\perp}$.

Notons n la dimension de F.

Si $n = 0$ alors $F = \{0\}$, donc $F^{\perp} = E$. Donc on a bien : $F \oplus F^{\perp} = E$.

Supposons désormais $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F.

Soit $x \in E$.

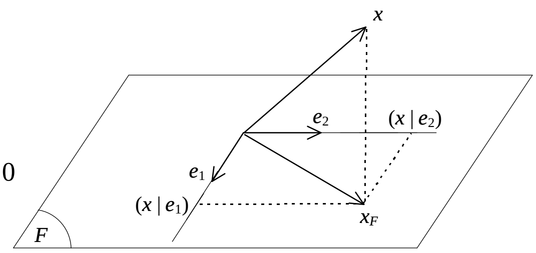
Posons : $$x_F = \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)\, e_j \in F$$

Écrivons alors : $$x = (x - x_F) + x_F$$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $$(x - x_F \mid e_i) = (x \mid e_i) - \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)(e_j \mid e_i) = (x \mid e_i) - \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j)\,\delta_{ij} = 0$$

Donc $x - x_F$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F, donc

$$x - x_F \in F^{\perp}$$



Ceci prouve : $$E = F + F^{\perp}$$

De plus, $$x \in F \cap F^{\perp} \Rightarrow (x \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Donc $$F \cap F^{\perp} = \{0\}$$

Conclusion : $$F \oplus F^{\perp} = E$$

Remarque : maintenant que l'on a prouvé que la somme est directe, on peut définir le projecteur p_F (dit "orthogonal") associé à la décomposition $F \oplus F^{\perp} = E$.