

## THÉORÈME DE BOLZANO WEIERSTRASS

Énoncé :

Soit  $(u_n)$  une suite **bornée** de réels. Alors, on peut extraire de  $(u_n)$  une sous-suite convergente.

(Variante : toute suite bornée de réels admet une valeur d'adhérence)

Démonstration :

L'idée générale :

Notons  $a_0$  (resp.  $b_0$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . (Existent car  $(u_n)$  bornée)

Posons  $I_0 = [a_0, b_0]$  et  $c_0$  le centre de  $I_0$ .

L'un, au moins, des deux intervalles  $[a_0, c_0]$  et  $[c_0, b_0]$  contient une **infinité de termes** de la suite  $(u_n)$ . (On a bien dit une infinité de termes ; ce n'est pas forcément une infinité de valeurs)

Notons  $I_1$  cet intervalle et  $c_1$  son centre. On réitère le procédé ci-dessus avec le segment  $I_1$ .

On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0. L'intersection de tous ces segments est donc un certain réel  $\ell$ . En outre, par construction, chacun de ces segments contient au moins un terme de la suite  $(u_n)$ . On peut donc construire une suite extraite en choisissant à chaque fois l'un de ces termes et cette suite converge nécessairement vers  $\ell$ .

Mise en forme :

Soient  $a_0 = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $b_0 = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$$

Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $a_0 \leq \alpha < \beta \leq b_0$ , notons :

$$N(\alpha, \beta) = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha \leq u_n \leq \beta\}$$

( $N(\alpha, \beta)$  est l'ensemble des **indices**  $n$  pour lesquels  $\alpha \leq u_n \leq \beta$ )

On sait que  $N(a_0, b_0)$  est infini. Posons  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ .

Comme  $N(a_0, b_0) = N(a_0, c_0) \cup N(c_0, b_0)$ , l'un, au moins, des deux ensembles  $N(a_0, c_0)$  ou  $N(c_0, b_0)$  est aussi infini.

Si  $N(a_0, c_0)$  est infini alors on pose  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = c_0$ .

Si  $N(c_0, b_0)$  est infini alors on pose  $a_1 = c_0$  et  $b_1 = b_0$ .

Le segment  $[a_1, b_1]$  ainsi construit est ainsi tel que  $N(a_1, b_1)$  soit infini.

Supposons maintenant  $[a_n, b_n]$  construit tel que  $N(a_n, b_n)$  soit infini. Posons  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

Comme  $N(a_n, b_n) = N(a_n, c_n) \cup N(c_n, b_n)$ , l'un, au moins, des deux ensembles  $N(a_n, c_n)$  ou  $N(c_n, b_n)$  est infini.

Si  $N(a_n, c_n)$  est infini alors on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$ .

Si  $N(c_n, b_n)$  est infini alors on pose  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

On a ainsi construit, par récurrence, une suite  $([a_n, b_n])$  de segments emboîtés :

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$ .

Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes.

Notons  $\ell$  leur limite commune.

Reste à montrer qu'il existe une application  $\sigma$  strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que la suite  $(u_{\sigma(n)})$  converge vers  $\ell$ .

Posons  $\sigma(0) = 0$ .

Puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on choisit  $\sigma(n)$  égal à un indice strictement supérieur à  $\sigma(n-1)$  qui est situé dans  $N(a_n, b_n)$ . (Il en existe nécessairement puisque  $N(a_n, b_n)$  est infini : on peut, par exemple, choisir le plus petit)

La suite  $(u_{\sigma(n)})$  est extraite de  $(u_n)$  et  $a_n \leq u_{\sigma(n)} \leq b_n$  donc  $(u_{\sigma(n)})$  converge vers  $\ell$ .