

## Q est dense dans R

### Lemme

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ .

Si  $b - a > 1$ , alors  $\exists p \in \mathbb{Z}$  tel que :  $a < p < b$

(Entre deux réels distants d'au moins une unité, on peut toujours intercaler un entier)

### Démonstration du lemme :

Considérons l'ensemble  $F$  des entiers supérieurs à  $b$  :

$$F = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq b\}$$

$F$  est non vide (car  $\mathbb{R}$  est Archimédien) et minoré (par  $a$ ) donc admet un plus petit élément  $n$ .

Posons  $p = n - 1$ . On a donc :  $p \notin F$  et  $p + 1 \in F$

C'est-à-dire :  $p < b$  et  $p \geq b - 1 > a$

Donc :  $\exists p \in \mathbb{Z}$  tel que :  $a < p < b$

### Proposition

$\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $x < y$ ,  $\exists r \in \mathbb{Q}$  tel que :  $x < r < y$ .

(On dit que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ )

### Démonstration :

On "agrandit" l'intervalle  $[x ; y]$  de façon qu'il contienne un entier :

$\exists q \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $q(y - x) > 1$  (toujours possible car  $\mathbb{R}$  est Archimédien)

C'est-à-dire :  $qy - qx > 1$

D'après le lemme, il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que :  $qx < p < qy$

En divisant par  $q (> 0)$  et en posant  $r = \frac{p}{q}$ , on obtient :

$$x < r < y \text{ où } r \in \mathbb{Q}$$

Ceci prouve que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . On note :  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Exercice : montrer que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (irrationnels) est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Déjà, on sait qu'il existe un irrationnel  $e$ .

Soient  $x, y \in \mathbb{Q}$  tels que  $x < y$ .

Comme  $\mathbb{R}$  est Archimédien, il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $q(y - x) > e$ .

Posons  $z = x + \frac{e}{q}$ . Il est clair que :  $x < z < y$

En outre,  $z$  est nécessairement irrationnel (sinon  $e$  serait rationnel)

Entre deux rationnels  $x$  et  $y$ , on peut donc intercaler un irrationnel.

Donc entre deux réels aussi d'où :  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$

Autre démonstration de "ℚ dense dans ℝ" :

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On définit les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  :

$$a_n = \frac{1}{10^n} E(10^n x) \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$$

Par exemple, avec  $x = \pi$ , on a :  $a_0 = 3$  et  $b_0 = 4$  ;  $a_1 = 3,1$  et  $b_1 = 3,2$  ;  $a_2 = 3,14$  et  $b_2 = 3,15$  etc ...

La suite  $(a_n)$  est la suite du développement décimal de  $x$ .

On montre que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites d'éléments de  $\mathbb{Q}$  qui encadrent  $x$  et qu'elles sont adjacentes. Elles convergent donc vers  $x$ .

Tout réel  $x$  est donc limite d'une suite de rationnels. En conséquence  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .